

# СОДЕРЖАНИЕ

## ВВЕДЕНИЕ В ГИДРАВЛИКУ

<i>Глава первая.</i> Определение гидравлики, ее метод и место, занимаемое ею среди других дисциплин . . . . .	9
<i>Глава вторая.</i> Главнейшие физические свойства жидкостей и силы, действующие в них . . . . .	13
2-1. Капельные жидкости и газы . . . . .	13
2-2. Силы, действующие в жидкости . . . . .	14
2-3. Плотность и объемный вес жидкости . . . . .	19
2-4. Вязкость жидкостей. Динамический и кинематический коэффициенты вязкости . . . . .	21
2-5. Упругость капельных жидкостей . . . . .	29
2-6. Упругость газов. Закон Клапейрона-Менделеева . . . . .	30
2-7. Поверхностное натяжение и капиллярность . . . . .	30

### Часть первая

#### ГИДРОСТАТИКА

<i>Глава третья.</i> Введение в гидростатику . . . . .	32
3-1. Свойство гидростатического давления в точке . . . . .	33
3-2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера) . . . . .	35
<i>Глава четвертая.</i> Гидростатические законы для жидкости, находящейся в „абсолютном“ покое . . . . .	39
4-1. Основное уравнение гидростатики и поверхности равного давления для несжимаемой жидкости, подверженной действию сил тяжести и давления . . . . .	39
4-2. Определение величины абсолютного и избыточного гидростатического давления в любой точке несжимаемой жидкости. Закон Паскаля . . . . .	41
4-3. Эюра гидростатического давления . . . . .	42
4-4. Гидростатический напор . . . . .	43
4-5. Условия равновесия разнородных жидкостей . . . . .	46
4-6. Сообщающиеся сосуды . . . . .	46
4-7. Жидкостные приборы для измерения давления . . . . .	47
Задачи 4-1 — 4-12 . . . . .	51
4-8. Статическое давление жидкости на плоскую поверхность. Гидростатический парадокс . . . . .	60
4-9. Центр статического давления жидкости на плоскую поверхность . . . . .	63
Задача 4-13 . . . . .	65

4-10. Статическое давление жидкости на криволинейные поверхности . . . . .	65
Задача 4-14 — 4-19 . . . . .	71
<b>Глава пятая. Гидростатические законы для жидкости, находящейся в относительном покое . . . . .</b>	<b>74</b>
5-1. Дифференциальное уравнение поверхности равного давления в жидкости, находящейся в относительном покое . . . . .	74
5-2. Относительный покой жидкости, находящейся в резервуаре, движущемся по наклонной плоскости с ускорением . . . . .	75
5-3. Относительный покой жидкости, находящейся в резервуаре, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью . . . . .	77
Задачи 5-1 — 5-3 . . . . .	79
5-4. Относительный покой жидкости, находящейся в резервуаре, вращающемся вокруг горизонтальной оси . . . . .	81
Задача 5-4 . . . . .	83
<b>Глава шестая. Основы теории плавания . . . . .</b>	<b>84</b>
6-1. Основные определения. Закон Архимеда . . . . .	84
6-2. Теорема Эйлера о крене . . . . .	86
6-3. Статическая остойчивость . . . . .	88
6-4. Динамическая остойчивость . . . . .	93
Задачи 6-1 — 6-6 . . . . .	94

**Часть вторая**  
**ГИДРОДИНАМИКА**

<b>Глава седьмая. Введение в гидродинамику . . . . .</b>	<b>99</b>
7-1. Ламинарное и турбулентное движение . . . . .	99
Задачи 7-1 — 7-2 . . . . .	103
7-2. Движение установившееся и неустановившееся. Понятие о местной осредненной скорости . . . . .	104
7-3. Линия тока . . . . .	107
7-4. Движение жидкого элемента. Вихревое и безвихревое движение . . . . .	109
<b>Глава восьмая. Основные уравнения гидродинамики . . . . .</b>	<b>111</b>
8-1. Гидравлическая модель потока . . . . .	111
8-2. Уравнение непрерывности . . . . .	112
8-3. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Л. Эйлера) . . . . .	116
8-4. Дифференциальные уравнения Л. Эйлера в естественной форме . . . . .	119
8-5. Уравнение Д. Бернулли для элементарной струйки идеальной капельной жидкости при неустановившемся и установившемся движении . . . . .	120
8-6. Уравнение Д. Бернулли для элементарной струйки реальной капельной жидкости . . . . .	124
8-7. Диаграмма уравнения Д. Бернулли для элементарной струйки капельной жидкости . . . . .	126
8-8. Скоростная трубка . . . . .	127
8-9. Уравнение Д. Бернулли для потенциального движения капельной жидкости . . . . .	129
8-10. Уравнение Д. Бернулли для идеальной и реальной капельной жидкости в относительном установившемся движении . . . . .	130
<b>Глава девятая. Некоторые дополнительные вопросы гидродинамики реальной жидкости . . . . .</b>	<b>134</b>
9-1. Обобщенный закон трения . . . . .	134
9-2. Свойство гидродинамического давления в реальной жидкости . . . . .	135

9-3. Гидродинамическое давление в данном направлении . . . . .	137
9-4. Дифференциальные уравнения движения реальной жидкости (уравнения Навье-Стокса) . . . . .	140
<b>Глава десятая. Динамика потока . . . . .</b>	<b>143</b>
10-1. Живое сечение потока . . . . .	143
10-2. Расход потока . . . . .	145
10-3. Средняя скорость потока . . . . .	145
10-4. Уравнение неразрывности потока . . . . .	146
10-5. Мощность потока $N$ в данном живом сечении потока . . . . .	147
10-6. Инерционная мощность потока . . . . .	150
10-7. Уравнение Бернулли для неустановившегося и установившегося потока реальной капельной жидкости . . . . .	152
10-8. Примеры гидравлических расчетов установившихся и неустановившихся потоков без учета гидравлических сопротивлений . . . . .	156
Задачи 10-1 — 10-3 . . . . .	156
<b>Глава одиннадцатая. Гидравлические сопротивления . . . . .</b>	<b>162</b>
11-1. Гидравлическое моделирование . . . . .	162
11-2. Основные законы подобия. Критерий подобия Ньютона . . . . .	163
11-3. Критерии подобия Рейнольдса, Фруда, Эйлера и Вебера . . . . .	166
11-4. Применение методов теории размерности к исследованию гидравлических закономерностей . . . . .	170
11-5. Гидравлические сопротивления. Принцип наложения потерь энергии . . . . .	172
<b>Глава двенадцатая. Ламинарное движение . . . . .</b>	<b>178</b>
12-1. Формирование изотермического ламинарного потока . . . . .	178
12-2. Дифференциальное уравнение равномерного изотермического ламинарного осесимметричного движения в трубопроводах . . . . .	180
12-3. Равномерное изотермическое ламинарное движение в круглом трубопроводе . . . . .	182
Задача 12-1 . . . . .	187
12-4. Ламинарное изотермическое равномерное движение жидкости между соосными цилиндрами . . . . .	187
12-5. Ламинарное изотермическое равномерное движение жидкости в плоской щели . . . . .	190
Задача 12-2 . . . . .	192
12-6. Плоский радиальный ламинарный поток . . . . .	193
12-7. Неизотермическое ламинарное движение в круглой трубе . . . . .	197
<b>Глава тринадцатая. Основы гидродинамической теории смазки . . . . .</b>	<b>200</b>
13-1. Виды трения . . . . .	200
13-2. Основные уравнения . . . . .	204
13-3. Распределение давления в смазочном слое ползуна и коэффициент трения . . . . .	207
<b>Глава четырнадцатая. Турбулентное движение . . . . .</b>	<b>210</b>
14-1. Поле скоростей в турбулентном потоке. Начальный участок . . . . .	210
14-2. Дифференциальное уравнение турбулентного потока . . . . .	216
14-3. Распределение скоростей по сечению турбулентного потока . . . . .	214
14-4. Коэффициент сопротивления трения по длине трубопровода $\lambda$ при турбулентном движении . . . . .	219
14-5. Коэффициент сопротивления трения по длине трубопровода $\lambda$ при турбулентном движении в гладких трубах . . . . .	225
14-6. Коэффициент сопротивления трения по длине трубопровода $\lambda$ в квадратичной зоне . . . . .	227



14-7. Коэффициент сопротивления трения по длине трубопровода $\lambda$ для общего случая турбулентного потока . . . . .	232
14-8. Некоторые другие эмпирические формулы и опытные данные для определения коэффициента $\lambda$ в турбулентном движении при квадратичном режиме . . . . .	235
14-9. Формулы для определения в турбулентном движении потерь удельной энергии в случае труб некруглого сечения . . . . .	239
14-10. Изотермическое турбулентное движение в круглой трубе. Коэффициент $\lambda$ и определение потерь удельной энергии . . . . .	239
<b>Глава пятнадцатая. Местные сопротивления . . . . .</b>	<b>240</b>
15-1. Коэффициент местного сопротивления и влияние на него числа Рейнольдса . . . . .	240
15-2. Потеря энергии при внезапном расширении потока. Теорема Борда-Карно . . . . .	246
15-3. Потеря энергии при выходе потока из трубопровода в большой резервуар . . . . .	250
15-4. Потеря энергии при постепенном расширении потока (диффузор) . . . . .	250
15-5. Потеря энергии при постепенном сужении потока (конфузор) . . . . .	252
15-6. Потеря энергии при внезапном сужении потока . . . . .	253
15-7. Потеря энергии при входе в трубу . . . . .	253
15-8. Потеря энергии при закруглении потока . . . . .	255
15-9. Потеря энергии при повороте потока в колене . . . . .	258
15-10. Потеря энергии в ответвлениях . . . . .	259
15-11. Коэффициенты сопротивлений $\zeta$ запорных приспособлений, клапанов и других устройств . . . . .	260
15-12. Экспериментальное определение коэффициента местных сопротивлений . . . . .	264
Задачи 15-1 — 15-4 . . . . .	265
<b>Глава шестнадцатая. Приборы для измерения расходов жидкости</b>	<b>272</b>
Задача 16-1 . . . . .	279
<b>Глава семнадцатая. Методы расчета трубопроводов, питающихся от резервуаров, уровень жидкости в которых остается постоянным . . . . .</b>	<b>280</b>
17-1. Самотечный трубопровод постоянного сечения (простой трубопровод) . . . . .	281
17-2. Определение давления в произвольной точке трубопровода . . . . .	283
17-3. Самотечный простой трубопровод переменного сечения . . . . .	285
Задача 17-1 . . . . .	286
17-4. Сифонный трубопровод, особенности его работы. Определение производительности . . . . .	287
17-5. Графоаналитический метод расчета производительности сифонного или самотечного трубопровода . . . . .	288
Задача 17-2 . . . . .	290
17-6. Графоаналитический метод расчета самотечного разветвленного трубопровода . . . . .	291
<b>Глава восемнадцатая. Методы расчета простейших водопроводных линий . . . . .</b>	<b>294</b>
18-1. Последовательное соединение трубопроводов . . . . .	294
18-2. Последовательно-параллельное соединение трубопроводов . . . . .	298
18-3. Водопровод с равномерным путевым расходом . . . . .	301
18-4. Задача о трех резервуарах . . . . .	303
Задача 18-1 . . . . .	307
18-5. Гидроэнергетический баланс насосной установки . . . . .	310
18-6. Элементы экономического расчета трубопровода . . . . .	311

<b>Глава девятнадцатая. Гидравлический удар в трубах . . . . .</b>	<b>314</b>
19-1. Определение гидравлического удара . . . . .	314
19-2. Формула Н. Е. Жуковского для давления при мгновенном закрытии задвижки . . . . .	315
19-3. Скорость распространения ударной волны в жидкости по Н. Е. Жуковскому . . . . .	319
19-4. Дифференциальные уравнения гидравлического удара . . . . .	320
19-5. Общий случай гидравлического удара . . . . .	323
19-6. Применение уравнений удара для тупикового трубопровода (гидравлический тупик) . . . . .	328
19-7. Гидравлический таран . . . . .	328
Задача 19-1 . . . . .	330
<b>Глава двадцатая. Истечение жидкости из отверстий и насадков при постоянном напоре . . . . .</b>	<b>331</b>
20-1. Истечение жидкости из отверстия при постоянном напоре . . . . .	331
20-2. Истечение жидкости из затопленного отверстия при постоянном напоре . . . . .	341
20-3. Экспериментальное определение коэффициентов расхода, сжатия, скорости и сопротивления . . . . .	341
20-4. Истечение жидкости из отверстия постоянной ширины в вертикальной стенке при постоянном напоре . . . . .	343
20-5. Истечение жидкости из круглого отверстия в вертикальной стенке при постоянном напоре . . . . .	345
20-6. Истечение жидкости через насадки. Внешний цилиндрический насадок . . . . .	346
20-7. Истечение жидкости через конoidalные насадки . . . . .	351
20-8. Истечение жидкости через внутренний цилиндрический насадок . . . . .	351
20-9. Истечение жидкости через конический сходящийся насадок . . . . .	352
20-10. Истечение жидкости через конический расходящийся насадок . . . . .	353
20-11. Истечение жидкости через распылители . . . . .	354
20-12. Траектория свободной струи. Дальность боя . . . . .	355
Задачи 20-1 — 20-4 . . . . .	360
<b>Глава двадцать первая. Истечение жидкостей из резервуаров при переменных уровнях свободной поверхности. Определение времени опорожнения резервуаров . . . . .</b>	<b>363</b>
21-1. Определение времени опорожнения резервуара. Общий случай . . . . .	363
21-2. Определение времени истечения жидкости из резервуара с постоянным поперечным сечением по высоте . . . . .	364
21-3. Определение времени истечения жидкости из резервуара с переменным поперечным сечением . . . . .	365
21-4. Графоаналитический метод определения времени слива . . . . .	369
Задачи 21-1 — 21-3 . . . . .	370
<b>Глава двадцать вторая. Сопротивление жидкости движущемуся в ней телу . . . . .</b>	<b>375</b>
22-1. Силы, действующие на тело, движущееся в жидкости . . . . .	375
22-2. Сопротивление трения . . . . .	376
22-3. Сопротивление давления . . . . .	377
22-4. Волновое сопротивление . . . . .	385
Задача 22-1 . . . . .	386
<b>Глава двадцать третья. Взаимодействие потока жидкости с твердым телом . . . . .</b>	<b>387</b>
23-1. Сила взаимодействия жидкости с поверхностью, движущейся равномерно, поступательно и прямолинейно . . . . .	387



23-2. Сила действия потока жидкости на неподвижное колесо, образующее угол $90^\circ$ . . . . .	390
23-3. Сила действия свободной струи на неподвижную плоскую поверхность . . . . .	390
23-4. Сила действия свободной струи на неподвижную криволинейную поверхность . . . . .	392
23-5. Сила действия свободной струи на поверхности, движущиеся поступательно, прямолинейно и равномерно . . . . .	393
23-6. Мощность струи, действующей на поверхности, движущиеся поступательно, прямолинейно и равномерно . . . . .	395
23-7. Индикаторная мощность потока жидкости, действующего на поверхность, вращающуюся с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси . . . . .	397
23-8. Взаимодействие жидкости с телом крылового профиля. Теорема Н. Е. Жуковского о подъемной силе . . . . .	400
Задачи 23-1 — 23-2 . . . . .	405
<b>Глава двадцать четвертая. Безнапорное установившееся движение жидкости . . . . .</b>	<b>409</b>
24-1. Дифференциальное уравнение установившегося безнапорного потока . . . . .	409
24-2. Равномерное движение . . . . .	410
24-3. Скоростной коэффициент . . . . .	412
24-4. Гидравлически наиболее выгодное сечение канала . . . . .	414
24-5. Допускаемые скорости . . . . .	417
Задачи 24-1 — 24-2 . . . . .	417
24-6. Дифференциальное уравнение неравномерного плавно изменяющегося установившегося движения жидкости. Критическая глубина . . . . .	419
24-7. Энергия сечения . . . . .	420
24-8. Формы свободной поверхности . . . . .	422
24-9. Уравнение прыжка . . . . .	423
24-10. Интегрирование дифференциального уравнения свободной поверхности . . . . .	425
<b>Глава двадцать пятая. Водосливы . . . . .</b>	<b>427</b>
25-1. Классификация водосливов . . . . .	428
25-2. Движение жидкости через водослив с тонкой стенкой . . . . .	428
25-3. Основная расчетная формула водослива с тонкой стенкой . . . . .	431
25-4. Движение жидкости через водослив с широким порогом . . . . .	433
25-5. Основная расчетная формула водослива с широким порогом . . . . .	434
25-6. Движение жидкости через водослив практического профиля . . . . .	436
25-7. Расчетные формулы для определения коэффициента расхода водосливов . . . . .	436
<b>Глава двадцать шестая. Гидравлика газов . . . . .</b>	<b>439</b>
26-1. Уравнение равновесия газа. Стандартная атмосфера . . . . .	440
26-2. Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеального газа при установившемся движении. Уравнение неразрывности . . . . .	442
26-3. Скорость звука в газе . . . . .	444
26-4. Истечение газа через насадок . . . . .	445
26-5. Расчет газопроводов . . . . .	449
Задачи 26-1 — 26-3 . . . . .	451

## Глава первая

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГИДРАВЛИКИ, ЕЕ МЕТОД И МЕСТО, ЗАНИМАЕМОЕ ЕЮ СРЕДИ ДРУГИХ ДИСЦИПЛИН

Современная гидравлика является технической наукой. Предметом гидравлики служат жидкости и законы, действующие в них и используемые преимущественно при решении разнообразных вопросов инженерной практики, как, например, при расчетах потоков в трубопроводах, гидротехнических сооружений, гидравлических машин и т. п.

Под жидкостями будем понимать как жидкости почти несжимаемые, т. е. капельные (вода, масло, бензин и т. п.), так и жидкости сжимаемые, т. е. газы. Такое широкое определение понятия жидкого тела допустимо потому, что многие гидравлические закономерности являются аналогичными как для капельных жидкостей, так и для газов, благодаря этому весьма важные явления и в капельных жидкостях и в газах описываются одними и теми же уравнениями.

Гидравлика делится на две части: на гидростатику и гидродинамику. Гидростатика изучает законы равновесия жидкостей и действие их на соприкасающиеся с ними твердые тела. Гидродинамика изучает законы движения жидкостей и взаимодействие их с соприкасающимися с ними покоящимися или движущимися твердыми телами.

Своими исследованиями гидравлика содействует развитию материалистического естествознания, стремящегося к познанию объективных законов движения материи. Поэтому гидравлику иногда рассматривают как одну из отраслей естествознания.

Широкое использование в народном хозяйстве гидравлических машин, механизмов и других устройств, в которых жидкость является рабочим телом, требует от инженеров механических специальностей серьезных знаний в области гидравлики.

Являясь основной дисциплиной, часто единственной во всем учебном плане, в которой студент изучает основы механики жидкого тела, гидравлика приобретает особо большое значение для специалистов машиностроителей, гидромашинистроителей, а также для специалистов по гидротехнике, водопроводу, кана-



лизации. Велико значение гидравлики в вопросах механизации и автоматизации производственных процессов. Для значительного числа технических дисциплин гидравлика является базой, без знания которой изучение их невозможно.

Слово «гидравлика» происходит от сочетания двух греческих слов ὕδωρ (хюдор) — вода и αὐλός (аулос) — труба, что свидетельствует о важности и в прошлом для гидравлики вопросов, относящихся к движению жидкостей по трубам. Круг вопросов современной гидравлики весьма велик, причем вопросы, касающиеся движения жидкости по трубам, и в настоящее время являются одними из основных ее вопросов.

Зародившаяся в глубокой древности еще в недрах общегреческой науки<sup>1</sup> гидравлика оформляется в самостоятельную науку лишь в начале мануфактурного периода капитализма<sup>2</sup>. К этому времени «...промышленность колоссально развилась и вызвала к жизни массу новых механических..., химических... и физических фактов...»<sup>3</sup>. Однако теоретические основы гидравлики были созданы лишь в конце XVII и середине XVIII вв. выдающимися работами Исаака Ньютона (1642—1727 гг.) и членов Петербургской академии наук Даниила Бернулли (1700—1782 гг.), Михаила Васильевича Ломоносова (1711—1765 гг.), Леонарда Эйлера (1707—1783 гг.).

Научную базу современной гидравлики составляют общие законы физики, особенно теоретической механики, а также закон Ломоносова о сохранении материи и движения. Важнейшим принципом гидравлики является принцип непрерывности Эйлера, в основу которого положено представление о жидкости как о непрерывной среде (континууме), допускающей неограниченную делимость ее материальных частичек. Согласно этому принципу такие важные для гидравлических исследований величины, как плотность, давление, количество движения, кинетическая энергия и т. д., выражаются в виде функциональных зависимостей, не имеющих в исследуемых объемах жидкости разрывов непрерывности<sup>4</sup>.

<sup>1</sup> Из древних ученых нужно отметить занимавшегося вопросами гидравлики греческого философа Архимеда, жившего с 287 по 212 г. до нашей эры. Архимед в трактате «О плавающих телах» сформулировал открытый им один из основных законов гидростатики «Закон Архимеда».

<sup>2</sup> Из ученых этого периода следует отметить Симона Стевина (1548—1620 гг.), Галилео Галилея (1564—1642 гг.), Эванджелиста Торричелли (1608—1647 гг.), Блеза Паскаля (1623—1662 гг.). Есть основания предполагать, что существенное влияние на создание основ гидравлики имел Леонардо да Винчи (1452—1519 гг.), занимавшийся изучением вопросов плавания, истечения жидкостей из отверстий, сопротивления жидкостей движущимся телам, движением жидкостей по трубам и каналам и т. п.

<sup>3</sup> Фридрих Энгельс, Диалектика природы, ГИПЛ, 1953, стр. 145.

<sup>4</sup> Случаи, не удовлетворяющие этому принципу, являются особыми и в учебнике не исследуются.

Сложность явлений, происходящих в движущейся жидкости, и невозможность во многих случаях исследования их только теоретически, а также необходимость проверки теоретических положений заставляют гидравликов широко использовать эксперимент, основанный на методах подобия, являющихся в настоящее время одними из наиболее эффективных средств исследования<sup>1</sup>.

Таким образом, методом гидравлики является совокупность аналитических и экспериментальных способов исследования гидравлических явлений.

Вопросами, родственными гидравлике, занимается и теоретическая гидромеханика, основоположником которой является Леонард Эйлер. В отличие от гидравлики теоретическая гидромеханика исследует вопросы, имеющие отношение не только к технике, значительно шире использует математические методы исследования и в меньшей степени, чем гидравлика, опирается на эксперимент. Однако все большее проникновение современной теоретической гидромеханики в область прикладных вопросов со все большим использованием экспериментальных методов исследования, так же как и широкое применение гидравликой гидромеханических методов исследования, стирает различие между этими двумя науками, по существу занимающимися изучением одних и тех же законов<sup>2</sup>.

Своему развитию современная гидравлика обязана и выдающимся представителям инженерного дела. Большие гидротехнические работы, связанные с сооружением гидростанций, каналов, водопроводов, а также развитие кораблестроения, машиностроения и особенно гидромашиностроения способствовали открытию важных гидравлических закономерностей<sup>3</sup>.

В нашей стране расцвет всех наук, в том числе и гидравлики, стал возможен лишь после победы Великой Октябрьской социалистической революции, когда Советская власть обобщила средства производства, сделала их собственностью всего народа и

<sup>1</sup> Основы теории подобия были созданы еще И. Ньютоном и дальнейшее развитие получили в трудах Осборна Рейнольдса (1842—1912 гг.), Виктора Львовича Киринцева (1845—1913 гг.) и др.

<sup>2</sup> Огромный вклад в развитие теоретической гидромеханики внесли Жозеф Лагранж (1736—1813 гг.), Герман Гельмгольц (1821—1894 гг.), Луи Навье (1785—1836 гг.), Адемар Сен-Венан (1797—1886 гг.), Георг Стокс (1819—1903 гг.) и многие другие, а из русских ученых Ипполит Степанович Громека (1851—1889 гг.), Николай Егорович Жуковский (1847—1921 гг.), Сергей Алексеевич Чаплыгин (1869—1942 гг.) и многие другие.

<sup>3</sup> Здесь следует отметить Антуана Шези (1718—1793 гг.), Дарси (1803—1858 гг.), Юлиуса Вейсбаха (1806—1871 гг.), Базена (1829—1917 гг.), а из русских и советских ученых Дмитрия Ивановича Менделеева (1834—1907 гг.), Алексея Николаевича Крылова (1863—1945 гг.), Владимира Григорьевича Шухова (1853—1939 гг.), Николая Егоровича Жуковского, Николая Павловича Петрова (1836—1920 гг.), Николая Николаевича Павловского (1884—1937 гг.), Леонида Самуиловича Лейбензона (1879—1951), а также Б. А. Бахметова, М. А. Великанова, А. Я. Миловича, И. Г. Есьмана и др.



тем уничтожила систему эксплуатации, создала социалистические формы хозяйства. Перед советскими учеными Коммунистической партией и Советским правительством были поставлены проблемы исключительной важности, разрешение которых должно было способствовать созданию материально-технической базы коммунистического общества.

Огромное строительство, ведущееся в нашей стране, является неисчерпаемым источником, питающим многочисленные области советской науки и, в частности, советскую гидравлику. Оно способствует успешному изучению многих гидравлических явлений, созданию совершенных методов исследования рабочих процессов в гидравлических машинах и т. д.

Одной из первых крупнейших работ советского периода развития гидравлики являются работы акад. Н. Н. Павловского. В 1922 г. Н. Н. Павловский развивает теорию Н. Е. Жуковского и создает общую теорию неравномерного движения жидкости в пористой среде. Тогда же Н. Н. Павловский разрабатывает методы исследований гидравлических явлений путем электрогидродинамических аналогий (метод ЭГДА). Этот метод основан на аналогичности дифференциальных уравнений, относящихся как к гидродинамическим, так и электрическим явлениям. Так, например, движение жидкости в грунте под плотиной исследуется путем измерения напряжения электрического поля на модели сооружения. Метод ЭГДА может применяться также для исследования обтекания тел. К достижениям советских ученых следует отнести работы И. И. Агроскина и М. Д. Чертоусова по теории неравномерного движения жидкости в открытых руслах, разработанную акад. С. А. Христиановичем теорию неустановившегося движения жидкостей в каналах, акад. Л. С. Лейбензоном теорию движения природных жидкостей и газов в пористой среде, которая явилась продолжением исследований Н. Е. Жуковского.

В изучении неустановившихся процессов в трубопроводах значительные результаты достигнуты М. А. Мостковым, Н. А. Картвелишвили, А. А. Суриным, И. А. Чарным и др.

Большие успехи были достигнуты в изучении турбулентного движения М. А. Великановым, А. Н. Колмогоровым, Л. Г. Лойцяцким, А. А. Фридманом и др.<sup>1</sup>

Значительное развитие в трудах А. Н. Ахутина, Н. М. Бернадского, Е. А. Замарина, И. И. Леви, Н. М. Мастицкого, Н. Н. Павловского, Ф. И. Пикалова, П. Я. Полубариновой-Кочиной, А. Н. Рахманова и др. получили вопросы так называемой инженерной гидравлики, под которой часто подразумевают разделы гидравлики, связанные с расчетами гидротехнических устройств (плотин, каналов и т. д.).

<sup>1</sup> По вопросам турбулентности в свое время мировую известность получили исследования Буссинеска (1897 г.), О. Рейнольдса (1883—1885 гг.), Т. Кармана (1930 г.), Д. Тейлора (1932 г.), Л. Прандтля (1932 г.) и др.

Советскими гидравликами уделяется большое внимание исследованию законов гидравлических сопротивлений. Особенно широкой известностью в Советском Союзе для так называемой квадратичной зоны гидравлических сопротивлений пользуется формула Н. Н. Павловского, созданная им еще в 1925 г. В практике гидравлических расчетов получила распространение формула И. И. Агроскина, предложенная в 1950 г. Наряду с формулами иностранных исследователей (Кольбука и Уайта и др.) в настоящее время получают применение для расчета трубопроводов формулы советских исследователей (А. Д. Альтшуля, И. А. Исаева, П. Н. Конакова, Н. З. Френкеля, Ф. А. Шевелева и др.). Большой вклад внесли А. П. Юфин, В. С. Кнороз, Г. Н. Роер в исследование вопросов, связанных с гидромеханизацией.

Выполнение пятилетних планов развития народного хозяйства с уверенностью говорит о преимуществах советского государственного и общественного строя перед капиталистическим и является доказательством того, что задачи, стоящие перед советскими учеными и инженерами, успешно ими выполняются.

Работы советских гидравликов, как и всех советских ученых, руководимых Коммунистической партией и Советским правительством и вооруженных марксистско-ленинским мировоззрением, направлены на дальнейшее развитие народного хозяйства, на неуклонное улучшение жизни советского народа.

Успехи советских гидравликов будут способствовать более быстрому осуществлению великой и благородной цели советского народа — построению коммунизма в нашей стране.

## Глава вторая

### ГЛАВНЕЙШИЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В НИХ

#### 2-1. Капельные жидкости и газы

*Жидкостью называется физическое тело, обладающее текучестью и не имеющее своей формы, но принимающее форму сосуда, в котором оно находится. Текучестью называется способность жидкости изменять свою форму, не дробясь на части, под действием даже небольших сил.*

Жидкости делятся на два класса: на капельные и газы. К капельным жидкостям относятся вода, масло, бензин и т. п. Эти жидкости способны образовывать капли; они имеют собственный объем и по сравнению с газами мало сжимаемы. Капельная жидкость, если ее объем меньше объема сосуда, всегда занимает часть его. В этом случае она имеет поверхность раздела капель-



ной жидкости с газом, называемую свободной поверхностью. Газ распространяется по всему объему сосуда<sup>1</sup>.

*Жидкость называют идеальной в тех случаях, когда при исследовании пренебрегают теми или другими, важными для исследуемого вопроса, ее физическими свойствами.* В дальнейшем будем называть жидкость идеальной, если пренебрежем ее вязкостью.

В гидравлике жидкость рассматривается как среда, непрерывным образом заполняющая некоторое пространство, т. е. как континуум, вследствие чего ее любой бесконечно малый объем рассматривается как физическое тело<sup>2</sup>.

Принимая жидкость за континуум, вместе с тем надо отличать жидкости однородные, т. е. с одинаковым распределением массы по объему, от неоднородных жидкостей, т. е. жидкостей с неодинаковым распределением массы по объему. Примером неоднородной жидкости может служить любой газ, хотя при малых изменениях давления практически возможно и его рассматривать как однородную жидкость<sup>3</sup>.

Распределение массы жидкости по объему характеризуется плотностью или объемным весом (см. § 2-3).

## 2-2. Силы, действующие в жидкости

При выводе различных гидравлических зависимостей приходится составлять уравнения движения или покоя жидкости и

<sup>1</sup> Согласно современным воззрениям в капельной жидкости существует решетчатое расположение ее молекул, но в отличие от кристаллической решетки твердого тела решетка капельной жидкости не имеет правильной формы. В своем тепловом движении молекулы капельной жидкости под влиянием действующих между ними сил большую часть времени совершают дрожания около некоторых положений равновесия (находятся в состоянии «оседлой жизни») и этим напоминают колебания молекул твердого тела. Время оседлой жизни молекулы равно  $10^{-10}$  сек. За это время молекула успевает совершить от 100 до 10 000 колебаний. Некоторым молекулам удается случайно набрать энергию и вырваться из своего окружения, переселившись в другое место. На новом месте молекула снова приходит в движение, имеющее характер дрожаний. Траектория, описываемая молекулой при ее неоднократном переселении, представляет ломаную линию, напоминающую траекторию молекулы газа в ее тепловом движении.

Течение жидкости возникает только при действии на жидкость внешних сил. Однако время действия этих сил должно быть больше времени оседлой жизни. В противном случае жидкость придет в напряженное состояние, аналогичное твердому телу.

<sup>2</sup> Это возможно благодаря тому, что размеры рассматриваемых в гидравлике частиц жидкости всегда велики по сравнению со средней длиной свободного пробега молекулы жидкости.

<sup>3</sup> В теоретической гидромеханике жидкость называется однородной, если во всем ее объеме она удовлетворяет одному и тому же уравнению состояния. С этой точки зрения один и тот же газ всегда будет представлять однородную жидкость.

включать в эти уравнения различные силы, действующие на рассматриваемые элементы жидкости и являющиеся по отношению к ним внешними силами. Эти силы делятся на силы массовые и силы поверхностные.

*Массовыми называются силы, величина которых пропорциональна массе жидкости.* К массовым силам относятся сила тяжести и силы инерции (Даламбера, переносная, Корнолиса). Каждая из этих сил инерции вводится в рассмотрение в зависимости от того, каким методом решается та или иная задача, что должно быть хорошо известно из курса теоретической механики. Напомним лишь, что силы инерции равны произведению масс на соответствующие ускорения и направлены в сторону, им противоположную.

В однородной жидкости сила тяжести и силы инерции оказываются пропорциональными объемам и именуется в этом частном случае объемными силами.

*Поверхностными называются силы, величина которых пропорциональна площади той поверхности, на которую эти силы действуют.* Рассмотрим их.

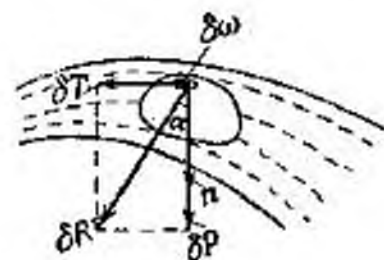
Для этого выделим в потоке жидкости (фиг. 2-1) некоторый объем, ограниченный произвольной поверхностью. На поверхность рассматриваемого объема со стороны окружающей его жидкости или со стороны соприкасающихся с объемом стенок канала или сосуда действуют силы. По отношению к рассматриваемому объему эти поверхностные силы являются внешними.

Обозначим через  $\delta R$  поверхностную силу, с которой окружающая жидкость или стенка действует на элементарную площадку  $\delta \omega$  указанной поверхности. Сила  $\delta R$  в общем случае может быть направлена как внутрь рассматриваемого объема под углом  $\alpha$  к направлению нормали  $n$ , так и вовне.

Разложим силу  $\delta R$  на две составляющие: на  $\delta P$  по направлению, совпадающему с нормалью  $n$ , и  $\delta T$  — по направлению касательной к площадке.

Силу  $\delta P$  назовем нормальной силой. Она может быть сжимающей силой — силой давления или растягивающей — силой растяжения. Силу  $\delta T$  назовем касательной силой или силой трения.

Силы трения обуславливаются деформацией жидкого объема и возникают только в движущейся жидкости. Силам трения будут посвящены отдельные параграфы. Здесь рассмотрим подробнее нормальные силы. Эти силы характеризуются нормальным напряжением в данной точке. Величина среднего



Фиг. 2-1. Схема разложения поверхностной силы на силу трения и силу давления.



нормального напряжения на данной элементарной площадке равна отношению  $\delta P$  к  $\delta \omega$ :

$$p_{срп} = \frac{\delta P}{\delta \omega} \text{ [кг/м}^2\text{]}^* \quad (2-1)$$

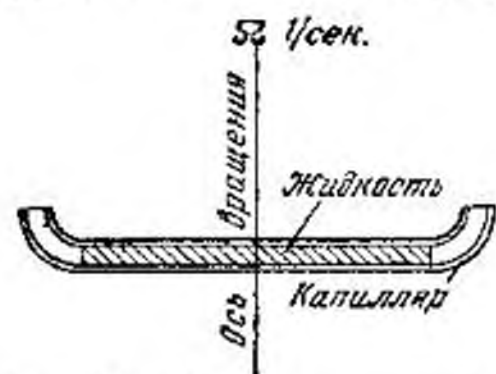
Абсолютным напряжением в точке в направлении  $n$  называется предел, к которому стремится среднее нормальное напряжение, соответствующее площадке  $\delta \omega$  с нормалью  $n$ , когда величина площадки стремится к нулю:

$$p_n = \lim_{\delta \omega \rightarrow 0} p_{срп} = \lim_{\delta \omega \rightarrow 0} \frac{\delta P}{\delta \omega}, \quad (2-2)$$

или

$$p_n = \frac{dP}{d\omega} \text{ [кг/м}^2\text{]}. \quad (2-3)$$

Напряжение измеряется в  $\text{кг/м}^2$  и т. п. Напряжение может быть как сжимающим, т. е. давлением, так и растягивающим.



Фиг. 2-2. Жидкость не выбрасывается из вращающегося капилляра вследствие способности воспринимать растягивающие усилия.

Способность жидкости воспринимать сжимающие усилия (давления) ничем не ограничена. Этого нельзя сказать о растягивающих усилиях. Газы вообще не способны их воспринимать. Капельные же жидкости, как доказано современными исследованиями, обладают способностью воспринимать достаточно большие растягивающие усилия.

Особенно наглядно это можно наблюдать на следующем примере. Открытый с обоих концов стеклянный капилляр

(фиг. 2-2) заполняется жидкостью и приводится во вращение вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. Благодаря вращению в жидкости возникает стремление быть выброшенной в обе стороны из капилляра. Однако даже при большой угловой скорости вращения  $\Omega$  жидкость не выбрасывается, что свидетельствует о ее способности воспринимать возникающие при этом растягивающие усилия. При подобных опытах удавалось достигнуть, например, в воде растягивающих напряжений до  $280 \text{ кг/см}^2$ . Таким образом, капельная жидкость обладает прочностью на разрыв и в этом отношении похожа на твердое тело.

Однако в практических условиях благодаря загрязнению жидкости и наличию в жидкости растворенного воздуха сопротивляемость ее растягивающим усилиям незначительна. В гидравлических расчетах считают, что предел прочности капель-

\* Отметим здесь (для исключения повторений в дальнейшем), что при определении размерных величин всегда будет указываться их размерность для того, чтобы только подчеркнуть их физический смысл в одной какой-либо системе единиц.

ной жидкости наступает при падении давления в жидкости до значений  $p_{п}$ , при котором начинается парообразование. Давление парообразования  $p_{п}$  всегда больше нуля и принимается как наименьшее давление в жидкостях. В тех зонах потока, где давление падает до  $p_{п}$ , возникает особое состояние жидкости, сопровождаемое местным образованием пузырьков в жидкости, заполненных парами жидкости и воздухом, и называемое кавитацией.

Давление насыщенных паров  $p_{п}$  для химически простой, однокомпонентной жидкости зависит только от рода жидкости и её температуры. Для сложных жидкостей давление зависит еще и от соотношения объемов паровой  $W_{п}$  и жидкой  $W_{ж}$  фазы<sup>1</sup>.

Например, согласно ГОСТ 1756-52 давление парообразования топлив поршневых двигателей определяется при  $t = 38^\circ \text{C}$  и  $\frac{W_{п}}{W_{ж}} = \frac{4}{1}$ . Некоторые средние значения  $p_{п}$  для различных топлив, соответствующие этим условиям, приведены в табл. 2-1. Однако условия гидравлического расчета, чаще всего не соответствуют этим условиям. Для других условий проф. А. С. Ирисов рекомендует формулу, предложенную Н. И. Тихоновым:

$$p_{п} = p_4 \cdot \left( \frac{14}{10 + \frac{W_{п}}{W_{ж}}} \right)^{0,31} \cdot 10^{4,026 - \frac{1,252}{273 + t^\circ \text{C}}} \quad (2-4)$$

где  $p_4$  соответствует  $\frac{W_{п}}{W_{ж}} = 4$  и  $t = 38^\circ \text{C}$ .

Для поды в гидравлических расчетах принято принимать давления парообразования согласно данным табл. 2-2.

Таблица 2-1  
Значения давления насыщенных паров моторных топлив, соответствующие четырехкратному отношению паровой фазы к жидкой при температуре  $t = 38^\circ \text{C}$

Сорт топлива	Температура, соответствующая выкипанию 10% фракций, °C	Давление насыщенных паров, кг/см <sup>2</sup>	По данным
Авиабензины . . .	65—85	0,336—0,211	А. С. Ирисова
Автобензины . . .	60—80	0,506—0,274	Бриджмена
Керосин . . . . .	180—200	0,049—0,038	Н. И. Тихонова

В движущейся жидкости абсолютное давление в точке называется гидродинамическим, а в покоящейся жидкости — гидро-



Таблица 2-2

Давление насыщенного водяного пара в зависимости от температуры

Температура пара, °С . . . . .	6,6	12,7	17,1	20,7	23,7	28,6	35,8	45,4	53,6
Давление пара, кг/см <sup>2</sup> . . . . .	0,01	0,015	0,020	0,025	0,030	0,040	0,060	0,100	0,150
Температура пара, °С . . . . .	64,6	75,4	85,5	99,1	119,6	132,9	142,9	151,1	158,1
Давление пара, кг/см <sup>2</sup> . . . . .	0,250	0,400	0,600	1,000	2	3	4	5	6
Температура пара, °С . . . . .	169,6	179	197,4	211,4	222,9	232,8	241,4		249,2
Давление пара, кг/см <sup>2</sup> . . . . .	8	10	15	20	25	30	35		40

статическим. В дальнейшем гидродинамическое и гидростатическое давления в точке будем называть просто давлением. Кроме абсолютного давления, в гидравлических исследованиях приходится иметь дело с понятиями избыточного давления и вакуума.

*Избыточным давлением называется избыток давления над атмосферным, который определяется как разность между абсолютным давлением, если оно больше атмосферного, и атмосферным:*

$$p_a = p_{аб} - p_{атм} \quad (2-5)$$

Это давление называют также манометрическим.

*Вакуумом, или разрежением, называется недостаток давления до атмосферного, который определяется как разность между*

Таблица 2-3

Значение нормального атмосферного давления в зависимости от высоты над уровнем моря

Высота над уровнем моря, м	0	100	200	250	300	500	600	700	800	1 000	1 200	1 500	2 000
Нормальное давление, кг/см <sup>2</sup> . . . . .	10 330	10 200	10 100	10 000	9 900	9 700	9 600	9 500	9 400	9 200	8 900	8 600	8 100
Высота водяного столба (при t=4° С), м . . . . .	10,33	10,2	10,1	10	9,9	9,7	9,6	9,5	9,4	9,2	8,9	8,6	8,1
Высота ртутного столба (при t=0° С), мм . . . . .	760	751	742	735,7	733	716	707	699	690	674	658	635	598

*атмосферным давлением и абсолютным, если последнее меньше атмосферного:*

$$p_a = p_{атм} - p_{аб} \quad (2-6)$$

Давление  $p = 1,033 \text{ кг/см}^2$ , равное одной физической атмосфере, соответствует нормальному атмосферному давлению на уровне моря. Величина атмосферного давления зависит от высоты места над уровнем моря и от состояния атмосферы. Значения атмосферного давления в зависимости от высоты места над уровнем моря (соответствующие нормальному атмосферному давлению на уровне моря) приведены в табл. 2-3, а также в табл. 20-1.

### 2-3. Плотность и объемный вес жидкости

*Плотностью жидкого тела  $\rho$  в данной точке называется предельное значение отношения массы элементарного тела  $\delta M$  [кг сек<sup>2</sup>/м] к его объему  $\delta W$  [м<sup>3</sup>] при стремлении  $\delta W$  к точке (к нулю):*

$$\rho = \lim_{\delta W \rightarrow 0} \frac{\delta M}{\delta W} = \frac{dM}{dW} \text{ [кг сек}^2\text{/м}^3\text{]}. \quad (2-7)$$

Предельное значение отношения веса  $\delta G$  элементарного тела к его объему называется **объемным весом**  $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{dG}{dW} \text{ [кг/м}^3\text{]}. \quad (2-8)$$

Объемный вес и плотность связаны зависимостью

$$\gamma = \rho g, \quad (2-9)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести.

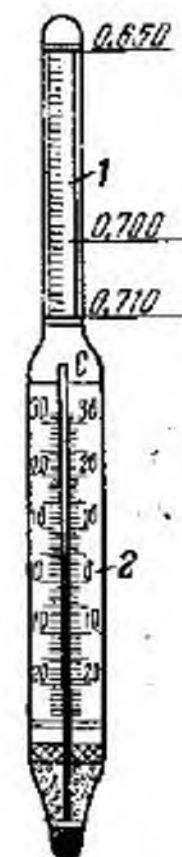
Для однородного жидкого тела плотность и объемный вес имеют одно и то же значение, не зависящее от величины объема, равное отношению массы всего тела  $M$  или веса  $G$  к его объему  $W$ , т. е. определяются по формулам:

$$\rho = \frac{M}{W}, \quad (2-10)$$

$$\gamma = \frac{G}{W}. \quad (2-11)$$

Наиболее просто объемный вес  $\gamma$  [Г/см<sup>3</sup>] (Г-грамм-сила) и плотность  $\rho$  [г/см<sup>3</sup>] (г-грамм-масса) определяются при помощи ареометра. На фиг. 2-3 показан ареометр для нефтяных продуктов (ГОСТ 1289-41), называемый нефтесексиметром.

В табл. 2-4 приведены значения объемных весов некоторых однородных жидких тел (см. также табл. 2-7). Для сопоставления в этой же таблице приведены значения объемного веса (для условий на уровне моря) для воздуха и ориентировочные значения  $\gamma$  для продуктов горения среднего состава.



Фиг. 2-3. Нефтесексиметр. 1 — ареометрическая шкала; 2 — термометр.



Таблица 2-4

Объемные веса некоторых жидких тел

Наименование жидкостей	$\gamma$ , кг/м <sup>3</sup>	$t$ , °C
Вода дистиллированная	1 000	4
Вода морская	1 020—1 030	15
Бензины:		
Автомобильный крекинг	755	15
КБ-70	745	15
Нефть бакинская	790—950	15
Керосин	760	15
Воздух	1,293	0
Воздух	1,183	20
Чугун расплавленный	7 000	1 200
Продукты горения среднего состава	1,25—0,0027 $t^\circ$	$t$

Объемный вес и плотность жидкостей зависят от температуры. Температурное изменение объема характеризуется коэффициентом объемного расширения  $\beta_p$ , который равен относительному изменению объема  $W$  при изменении температуры  $t$  на 1° C и определяется по формуле

$$\beta_p = \frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \left[ \frac{1}{^\circ\text{C}} \right]. \quad (2-12)$$

Для определения плотности  $\rho$  или объемного веса жидкости  $\gamma$  при температуре  $t^\circ\text{C}$ , можно пользоваться следующими формулами: для ртути

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + 0,0001815 \cdot t} \quad (2-13)$$

где  $\gamma_0 = 13\,593$  кг/м<sup>3</sup> — объемный вес ртути при  $t = 0^\circ\text{C}$ . Для нефти и нефтепродуктов применяется формула Д. И. Менделеева:

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta_p(t - t_0)}, \quad (2-14)$$

где  $\rho_0$  — плотность при температуре  $t_0$ .

Формулу Менделеева можно представить и в другом виде:

$$\rho = \rho_0 - \beta(t - t_0), \quad (2-15)$$

где

$$\beta = \beta_p \cdot \rho. \quad (2-16)$$

Коэффициент  $\beta$  будем называть температурной поправкой. Значения  $\beta$ , соответствующие плотности  $\rho$  при искомой температуре  $t$ , приведены в табл. 2-5. При пользовании табл. 2-5 плотность  $\rho_0$  должна соответствовать температуре  $t_0 = 20^\circ\text{C}$  и размерности г/см<sup>3</sup>.

Таблица 2-5

Средние значения температурных поправок плотности нефтепродуктов<sup>1</sup>

Плотность $\rho$ при температуре $t^\circ$	Температурная поправка $\beta$	Плотность $\rho$ при температуре $t^\circ$	Температурная поправка $\beta$	Плотность $\rho$ при температуре $t^\circ$	Температурная поправка $\beta$
0,6900—0,6999	0,000910	0,8000—0,8099	0,000765	0,9000—0,9099	0,000633
0,7000—0,7099	0,000897	0,8100—0,8199	0,000752	0,9100—0,9199	0,000620
0,7100—0,7199	0,000884	0,8200—0,8299	0,000738	0,9200—0,9299	0,000607
0,7200—0,7299	0,000870	0,8300—0,8399	0,000725	0,9300—0,9399	0,000594
0,7300—0,7399	0,000857	0,8400—0,8499	0,000712	0,9400—0,9499	0,000581
0,7400—0,7499	0,000844	0,8500—0,8599	0,000699	0,9500—0,9599	0,000567
0,7500—0,7599	0,000831	0,8600—0,8699	0,000686	0,9600—0,9699	0,000554
0,7600—0,7699	0,000818	0,8700—0,8799	0,000673	0,9700—0,9799	0,000541
0,7700—0,7799	0,000805	0,8800—0,8899	0,000660	0,9800—0,9899	0,000528
0,7800—0,7899	0,000792	0,8900—0,8999	0,000647	0,9900—0,9999	0,000515
0,7900—0,7999	0,000778				

#### 2-4. Вязкость жидкостей. Динамический и кинематический коэффициенты вязкости

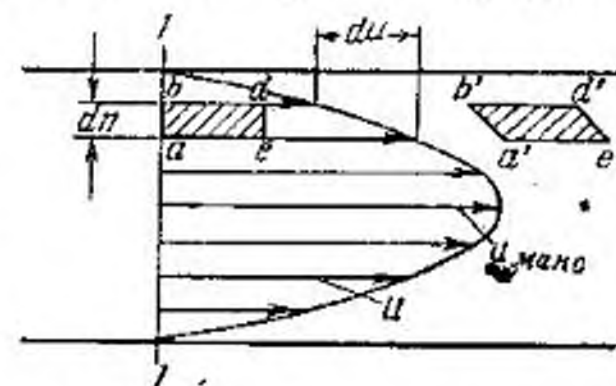
Физика рассматривает два рода вязкости жидкости: объемную и тангенциальную.

Объемная вязкость характеризует способность жидкости воспринимать сжимающие и растягивающие усилия. Благодаря объемной вязкости всегда существует сдвиг фаз между давлением, оказываемым на жидкость, и объемной деформацией, которую создает это давление.

Тангенциальная вязкость, о которой будет идти речь, характеризует способность жидкостей воспринимать касательные усилия (силы трения).

Рассмотрим движение жидкости, при котором скорости отдельных ее частиц параллельны оси трубы (фиг. 2-4). Опыт показывает, что такое движение жидкости в природе существует (оно называется ламинарным движением и в дальнейшем будет подробно изучено). Скорости  $u$  частиц, расположенных в некотором поперечном сечении трубы  $I-I$ , отличаются друг от друга.

Скорость жидкости у стенки равна нулю и возрастает по направлению к оси трубы, достигая на оси наибольшего значения  $u_{\text{макс}}$ . Поток жидкости может быть представлен как движение отдельных бесконечно тонких цилиндрических слоев жидкости,



Фиг. 2-4. В ламинарном потоке прямоугольник деформируется в параллелограмм.

<sup>1</sup> Таблица составлена проф. М. М. Кусаковым.



перемещающихся с различными скоростями, увеличивающимися к оси трубы.

Вследствие молекулярного движения молекулы жидкости пересекают слои жидкости, движущиеся по отношению друг к другу с относительной скоростью, благодаря чему на поверхности соприкасающихся слоев жидкости возникают силы трения. При этом слои жидкости, движущиеся быстрее, увлекают за собой слои жидкости, движущиеся медленнее, и, наоборот, слои жидкости, движущиеся медленнее, тормозят движение слоев, движущихся быстрее. В таком движении частица жидкости в виде прямоугольника  $abde$  деформируется в параллелограмм  $a'b'd'e'$ . Деформация объема является обязательным условием возникновения сил трения.

Благодаря деформации происходит скашивание прежде прямого угла  $bae$  прямоугольника с угловой скоростью скашивания, равной:

$$\Omega_{ск} = \frac{du}{dn} [1/сек]. \quad (2-17)$$

Эта величина называется градиентом скорости.

Сила трения  $T$  между слоями жидкости пропорциональна площади соприкосновения  $S$  и угловой скорости скашивания угла  $\frac{du}{dn}$ .

$$T = \mu S \frac{du}{dn}. \quad (2-18)$$

Формула (2-18) является выражением закона Ньютона о трении в жидкостях.

Напряжение этой силы  $\tau = \frac{T}{S}$  равно:

$$\tau = \mu \cdot \frac{du}{dn},$$

где  $\mu$  — так называемый динамический коэффициент вязкости жидкости, имеющий размерность  $\kappa\Gamma \text{сек}/\text{м}^2$  или  $\text{г}/\text{см сек}$ .

Будем считать  $\tau$  величиной всегда положительной. Поэтому в зависимости от знака  $\frac{du}{dn}$  формулу для  $\tau$  представим в виде:

$$\tau = \pm \mu \cdot \frac{du}{dn}, \quad (2-19)$$

где „+“ будет соответствовать положительному значению  $\frac{du}{dn}$ ,

а „—“ — отрицательному; знак  $\frac{du}{dn}$  зависит от закона измене-

ния скорости по сечению потока и выбора направления изменения скорости<sup>1</sup>.

Кроме динамического коэффициента вязкости  $\mu$ , в гидравлике применяется кинематический коэффициент вязкости  $\nu$ , который равен отношению динамического коэффициента вязкости к плотности  $\rho$ :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} [\text{м}^2/\text{сек}]. \quad (2-20)$$

В системе CGS за единицу измерения динамического коэффициента вязкости принимают пуаз, имеющий размерность  $\text{г}/\text{см} \cdot \text{сек}$ , названный так в честь французского ученого Пуазейля.

Пуаз соответствует такой вязкости, при которой в прямолинейно движущейся жидкости при градиенте скорости  $\frac{du}{dn} = 1$  /сек на поверхности соприкасающихся слоев жидкости развивается сила трения в 1 дин/см<sup>2</sup>.

Кинематический коэффициент вязкости в системе CGS измеряется в  $\text{см}^2/\text{сек}$  — в стоксах (в честь английского ученого Стокса).

Учитывая, что 1  $\kappa\Gamma = 981\,000$  дин, а 1  $\text{м}^2 = 10\,000$   $\text{см}^2$ , легко установить связь между числами, выражающими вязкость в технической и физической системах единиц:

$$\mu \frac{\text{дин} \cdot \text{сек}}{\text{см}^2} = 98,1 \left( \mu \frac{\kappa\Gamma \cdot \text{сек}}{\text{м}^2} \right) \quad (2-21)$$

$$\nu \text{ см}^2/\text{сек} = 10\,000 (\nu \text{ м}^2/\text{сек}). \quad (2-22)$$

<sup>1</sup> Согласно современным исследованиям (Я. И. Френкель, Введение в теорию металла, 1959) для капальной жидкости

$$\mu = \frac{2t_0\kappa}{\delta^3} e^{-\frac{U}{\kappa T}},$$

где  $\kappa$  — постоянная Больцмана;

$T$  — абсолютная температура;

$\delta$  — расстояние между молекулами;

$t_0$  — период колебания молекулы (см. сноску на стр. 14);

$U$  — энергия, которую должна затратить молекула для того, чтобы вырваться из окружения.

Для газов согласно кинетической теории газа

$$\mu = (0,31 \div 0,49) \rho u_m l,$$

где 0,31 ÷ 0,49 — коэффициенты, принимаемые в зависимости от закона распределения скоростей и характера удара молекул газа в их тепловом движении;

$u_m$  — средняя скорость молекулярного движения;

$l$  — длина свободного пробега молекулы между двумя столкновениями.

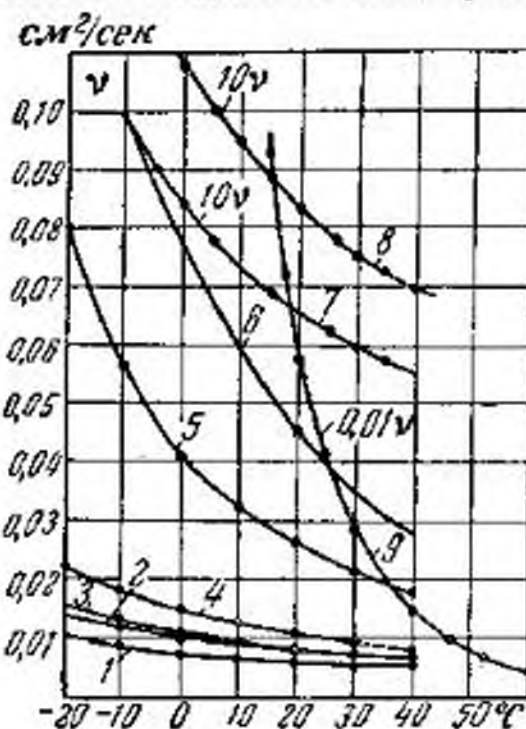
Заметим, что в отличие от капальных жидкостей вязкость газов не зависит от давления, так как от давления не зависит произведение  $\rho l$ .



Заметим, что имеются жидкие тела, силы трения в которых не подчиняются формуле (2-18). Такие жидкости называются аномальными. К ним относятся некоторые масла при отрицательных температурах, парафинистые нефтепродукты при низких температурах, а также коллоиды<sup>1</sup>. Для аномальных жидкостей  $\tau$  определяется по формуле

$$\tau = \tau_a \pm \mu \cdot \frac{du}{dn} \quad (2-23)$$

В этой формуле  $\tau_a$  — предельное значение напряжения силы трения, лишь после достижения которого аномальная жидкость приходит в движение с соответствующим градиентом скорости  $\frac{du}{dn}$ . Таким образом, в аномальных жидкостях силы трения могут возникать и в покоящейся жидкости.



Фиг. 2-5. Зависимость кинематического коэффициента вязкости от температуры.

1 — авиабензин парафинистый; 2 — авиабензин бакинский; 3 — бензин крекинг; 4 — бакинский дигроин; 5 — бакинский керосин, тракторный; 6 — газойль; 7 — автомобильный крекинг-бензин; 8 — бензин КБ-70; 9 — дизельное масло.

Давление и температура оказывают существенное влияние на вязкость жидкости. Впервые совместное влияние на вязкость давления и температуры было установлено еще в 1912 г. профессором Московского университета А. И. Бачинским (1877—1944 гг.). Позже этим вопросом занимались многие ученые. Эти исследования показали, что как температура (фиг. 2-5), так и давление (фиг. 2-6) оказывают большое влияние на значение вязкости. Это влияние проявляется различно. Влияние температуры особенно сильно сказывается в области низких температур, а влияние давления — в области высоких давлений. Например, при  $p = 3400 \text{ кг/см}^2$  и  $t = 20^\circ \text{C}$  динамический коэффициент вязкости трансформаторного масла почти в 6500 раз больше динамического коэффициента вязкости, (см. табл. 2-7) при той же температуре, но при  $p = 1 \text{ кг/см}^2$ . В области невысоких давлений, встречающихся при перекачке жидкостей ( $p < 100 \text{ кг/см}^2$ ), влияние давления на вязкость значительно меньше. Например для того же трансформаторного масла

при  $t = 20^\circ \text{C}$

$$\mu = 0,275 \text{ пуаза при } p = 1 \text{ кг/см}^2;$$

$$\mu = 0,296 \text{ пуаза при } p = 100 \text{ кг/см}^2,$$

т. е. увеличивается только на 10%.

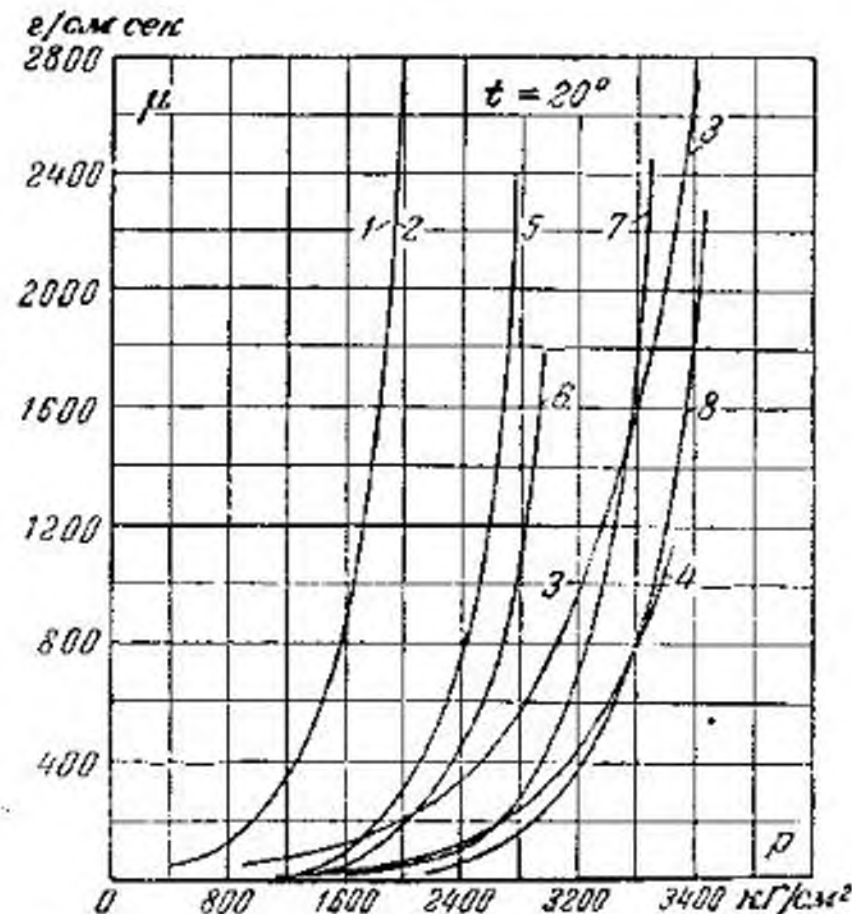
Таким образом, вязкость капальной жидкости увеличивается с увеличением давления. Исключением представляет лишь вода, у которой при  $t = 24^\circ \text{C}$  вязкость несколько уменьшается с увеличением давления. Зависимость вязкости от давления может быть представлена в виде:

$$\mu = \mu_0 \cdot e^{\beta_n \cdot p} \quad (2-24)$$

где  $\beta_n$  — пьезокоэффициент,  $\text{м}^2/\text{кг}$ ;

$\mu_0$  — динамический коэффициент вязкости при давлении  $p_\mu = 0$ .

<sup>1</sup> Коллоидами называются вещества, которые не кристаллизуются и не проходят через перепонки растительного и животного происхождения (например, белок, крахмал, клей).



Фиг. 2-6. Зависимость динамического коэффициента вязкости масел от давления при постоянной температуре  $t = 20^\circ \text{C}$ .

1 и 2 — масло МС повышенной и нормальной вязкости; 3 — касторовое; 4 — синтетическое; 5 — вазелиновое; 6 — турбинное; 7 — веретенное; 8 — трансформаторное.

Экспериментальные исследования показывают, что значение  $\beta_n$  зависит главным образом от физических особенностей жидкости и ее температуры, а также, хотя и в меньшей степени, от диапазона изменения давления. Для некоторых масел среднее значение  $\beta_n$  приведено в табл. 2-6. Вязкость газов от давления не зависит (см. сноску на стр. 23).

Таблица 2-6

Значение пьезокоэффициента  $\beta_n$  [ $\text{см}^2/\text{кг}$ ] для некоторых масел в зависимости от температуры

Сорт масла	11° С	20° С	30° С
Вазелиновое	—	0,00268	0,00237
Грозненское МС повышенной вязкости	0,00284	0,00265	0,00240
Грозненское МС нормальной вязкости	0,00294	0,00277	0,00255
Глицерин	—	0,00055	0,00055
Турбинное Л	0,00269	0,00257	0,00255
Веретенное АУ	0,00248	0,00242	0,00241
Касторовое	0,0154	0,0150	0,0143
Синтетическое № 1	—	0,00142	0,00159
			0,00132

( $1000 < p < 4000$ )



Для определения вязкости при разных температурах пользуются эмпирическими формулами или графиками. Так, вязкость воды в зависимости от температуры определяется по формуле Пуазейля:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0,01775}{1 + 0,0337 \cdot t + 0,000221 \cdot t^2} \text{ [см}^2\text{/сек].} \quad (2-25)$$

Зависимость  $\nu$  для воды на основании опытных данных показана на фиг. 2-7.

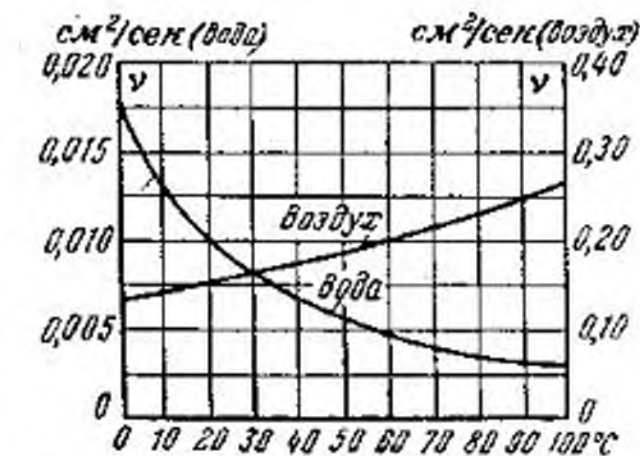
Зависимость кинематического коэффициента вязкости нефтепродуктов в сантистоксах ( $\text{мм}^2\text{/сек}$ ) от температуры достаточно хорошо выражается формулой

$$\lg(\nu + 0,8) = \frac{A}{(273 + t^\circ \text{C})^B}, \quad (2-26)$$

где коэффициент  $A$  характеризует отдельные сорта нефтепродукта, а показатель степени  $B$  — иногда и целую группу нефтепродуктов. В системе координат, в которой по оси ординат откладывается  $\lg[\lg(\nu + 0,8)]$ , а по оси абсцисс —  $\lg(273 + t^\circ \text{C})$  эта зависимость изображается в виде прямой линии (фиг. 2-8).

Для удобства пользования графиком вместо значений логарифмов ( $\lg \lg$  и  $\lg$ ) на осях координат указаны соответствующие этим логарифмам значения  $\nu$  и  $t$ .

Для построения зависимости достаточно знать коэффициент вязкости только при двух значениях температуры. В табл. 2-7 приведены значения коэффициентов вязкости по данным проф. М. П. Воларовича.



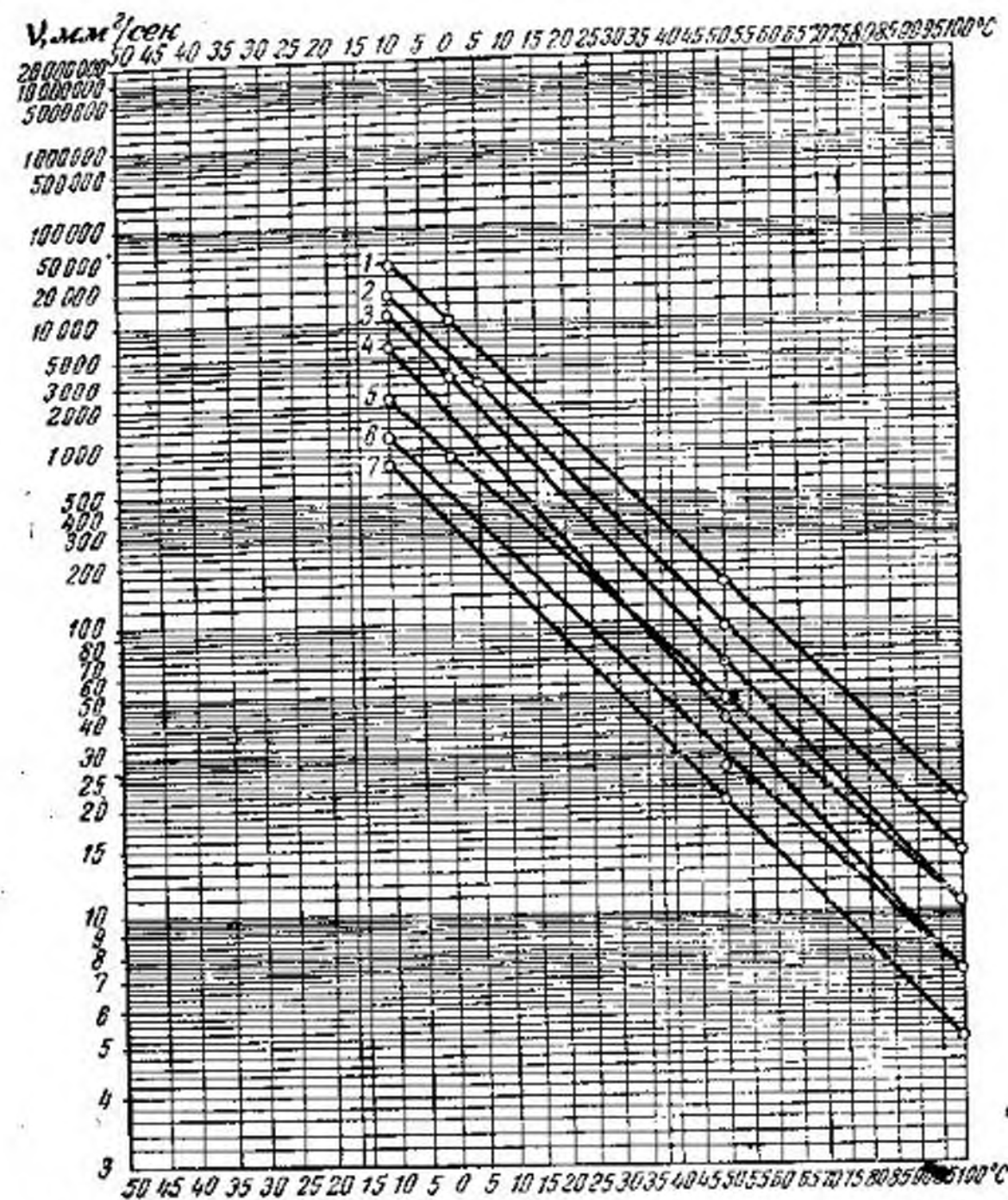
Фиг. 2-7. Зависимость кинематического коэффициента вязкости воды и воздуха от температуры.

ры по принципу действия могут быть разделены на две группы. К первой группе относятся приборы, позволяющие определить относительное значение вязкости, т. е. отношение коэффициента вязкости испытуемой жидкости к известному коэффициенту вязкости эталонной жидкости, — вискозиметр по ГОСТ 1532-42 (фиг. 2-9), капиллярный по ГОСТ 33-40 (фиг. 2-10) и т. п. Ко второй группе относятся приборы, которые позволяют определить значения коэффициента вязкости безотносительно к эталонной жидкости, основанные на исследовании падения шариков, цилиндров, колебательных или вращательных движений цилиндров и дисков в испытуемых жидкостях. Наиболее широкое распространение получили приборы первой группы.

Первый вискозиметр был создан в 1751 г. М. К. Ломоносовым и назывался «инструментом для исследования вязкости жидких материй по числу капель», вытекавших под постоянным давлением из капиллярной трубки.

Вязкость газов в отличие от вязкости капельных жидкостей увеличивается вместе с увеличением температуры. Это следует (см. сноску на стр. 23) из того, что с увеличением температуры увеличивается как скорость молекул  $u_m$  (которая пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры  $T$ ), так и длина свободного пробега молекулы  $l$ . Для воздуха зависимость  $\nu$  от температуры показана на фиг. 2-7.

Коэффициенты вязкости определяются опытным путем при помощи вискозиметров. Эти весьма разнообразные по своему устройству прибо-



Фиг. 2-8. Зависимость кинематического коэффициента вязкости различных масел от температуры.

1—МС-20; 2—МС-14; 3—автол 10 дистиллятный; 4—автол 6 дистиллятный; 5—веретенное 2, загущенное до вязкости автота 10; 6—веретенное 2, загущенное до вязкости автота 6; 7—веретенное 3.

Вискозиметр по ГОСТ 1532-42 применяется для определения коэффициентов вязкости жидкости, более вязкой, чем вода. Вязкость в условных градусах  $E^\circ$  определяется по формуле

$$E^\circ = \frac{t_1}{t_2}, \quad (2-27)$$

где  $t_1$  — время истечения  $200 \text{ см}^3$  испытуемой жидкости при заданной температуре, а  $t_2$  — время истечения  $200 \text{ см}^3$  дистиллированной воды при температуре  $20^\circ \text{C}$ . Градусы  $E^\circ$  можно пересчитать в кинематический коэффициент вязкости по формуле Фогеля

$$\nu = 0,01 \cdot E \cdot 7,6 \left(1 - \frac{1}{E^2}\right) \text{ [см}^2\text{/сек].} \quad (2-28)$$



Таблица 2-7

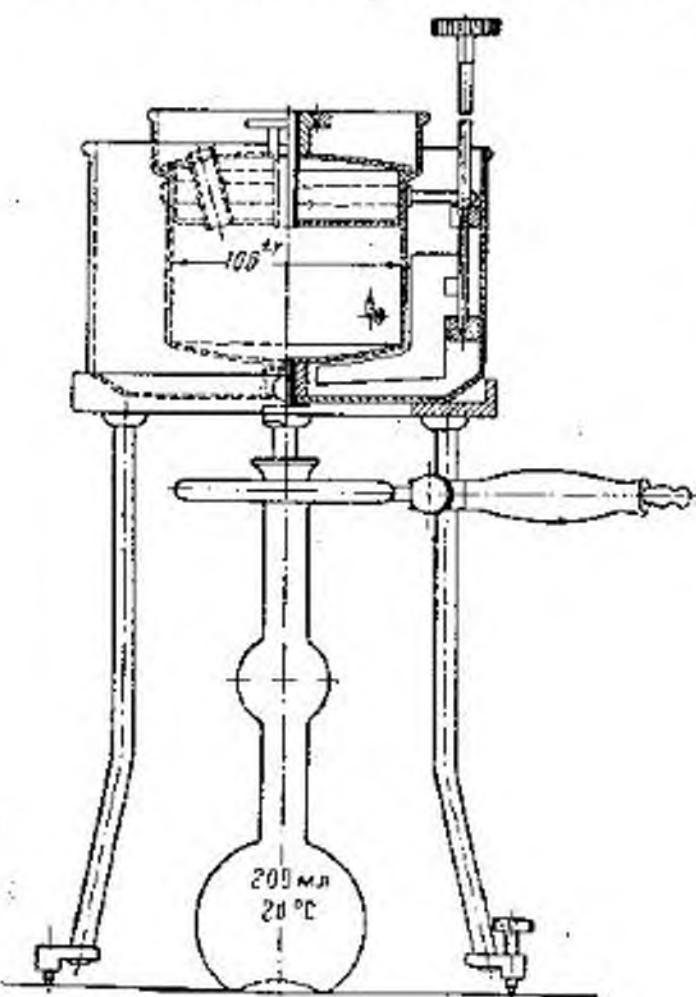
Значения плотности или объемного веса и вязкости различных масел при атмосферном давлении по данным проф. М. П. Водаровича

Сорт масла	$\rho$ г/см <sup>3</sup> = $\gamma$ Г/см <sup>3</sup>			$\nu$ пуазы		
	14° С	20° С	30° С	14° С	20° С	30° С
Грозненское МС повышенной вязкости	0,895	0,892	0,885	21,8	12,9	6,02
Грозненское МС нормальной вязкости	0,898	0,894	0,888	18	10,5	4,73
Турбинное Л	0,897	0,894	0,888	1,26	0,860	0,462
Веретенное АУ	0,893	0,889	0,882	0,607	0,432	0,249
Трансформаторное	0,882	0,887	0,870	0,376	0,275	0,171
Касторовое	0,966	0,960	0,954	17,6	10,43	4,79
Вазелиновое	—	0,878	0,874	—	1,38	0,733
Масло синтетическое № 1 силикон	—	0,973	0,65	—	5,2	4,17
Глицерин	—	1,249	1,242	—	5,12	2,39

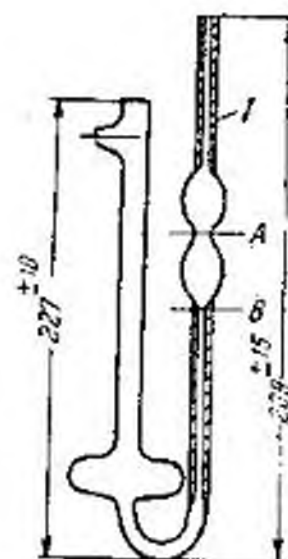
Вискозиметр по ГОСТ 33.40 (Оствальда-Пинкевича) применяется для определения кинематического коэффициента вязкости жидкостей, менее вязких чем вода. Вискозиметр представляет собой стеклянную U-образную трубку, в правое колено которой вставлен капилляр  $l$ . Кинематический коэффициент вязкости определяется по формуле

$$\nu = kl, \quad (2-29)$$

где  $k$  — постоянная вискозиметра, зависящая главным образом от стандартной эталонной жидкости, по которой прибор градуировался, а также и от размеров капилляра (для градуировки вискозиметра,



Фиг. 2-9. Вискозиметр для определения условной вязкости.



Фиг. 2-10. Капиллярный вискозиметр Оствальда-Пинкевича.

предназначенного для определения вязкости, например моторных топлив, берется дважды дистиллированная вода); а  $t$  — время истечения испытуемой жидкости в объеме, заключенном между отметками  $A$  и  $B$ .

## 2-5. Упругость капельных жидкостей

Упругость капельных жидкостей характеризуется коэффициентом объемного сжатия  $\beta_c$ , который равен относительному изменению объема  $W$  при изменении давления  $p$  на  $1 \text{ кг/м}^2$  и определяется по формуле

$$\beta_c = -\frac{1}{W} \cdot \frac{dW}{dp} \quad [\text{м}^2/\text{кг}]. \quad (2-30)$$

Коэффициент объемного сжатия  $\beta_c$  можно также считать равным относительному изменению плотности  $\rho$  при изменении давления на  $1 \text{ кг/м}^2$  и определять по формуле

$$\beta_c = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dp}. \quad (2-31)$$

Легко проверить, воспользовавшись формулой (2-10), тождественность формул (2-30) и (2-31).

Величина  $K$ , обратная коэффициенту объемного сжатия, называется модулем объемной упругости:

$$K = \frac{1}{\beta_c} \quad [\text{кг/м}^2]. \quad (2-32)$$

Зависимость модуля объемной упругости  $K$  от давления, выраженного в  $\text{кг/см}^2$ , и температуры приближенно можно выразить формулой:

$$K = K(p_0 + p_*) \quad [\text{кг/см}^2], \quad (2-33)$$

где параметр  $p_*$  зависит от температуры, а коэффициент  $K$  для разных жидкостей изменяется в пределах от  $K = 6,5$  для воды до  $K = 10,5$  для ртути. Для воды  $p_*$  в зависимости от температуры изменяется согласно табл. 2-8.

Для воды среднее значение модуля упругости  $K = 20\,000 \text{ кг/см}^2$ , для керосина  $K = 17\,200 \text{ кг/см}^2$ , для дизельного топлива  $K = 16\,000 \text{ кг/см}^2$ ; для других нефтепродуктов  $K = 13\,500 \text{ кг/см}^2$ .

Таблица 2-8

Значения параметра  $p_*$  для воды в формуле для модуля объемной упругости  $K$  в зависимости от температуры

$t, ^\circ\text{C}$	$p_*, \text{кг/см}^2$	$t, ^\circ\text{C}$	$p_*, \text{кг/см}^2$	$t, ^\circ\text{C}$	$p_*, \text{кг/см}^2$
0	2 950	20	3 260	60	3 360
5	3 080	30	3 290	80	3 290
10	3 140	40	3 420	100	3 140
15	3 220	50	3 400	200	1 770



### 2-6. Упругость газов. Закон Клапейрона-Менделеева

В отличие от капельных жидкостей газы способны сильно сжиматься. При изменении объема газа, в общем случае, изменяются его давление и температура. Для совершенных газов, к которым применимы законы Бойля и Мариотта, зависимость между давлением и объемом определяется основным характеристическим уравнением их состояния — законом Клапейрона-Менделеева<sup>1</sup>:

$$pW = GRT; \quad (2-34)$$

$$\frac{p}{\gamma} = RT, \quad (2-35)$$

где  $p$  — давление,  $\text{кг/м}^2$ ;  
 $W$  — объем,  $\text{м}^3$ ;  
 $G$  — вес,  $\text{кг}$ ;  
 $\gamma$  — объемный вес,  $\text{кг/м}^3$ ;  
 $T = 273^\circ + t^\circ \text{C}$  — абсолютная температура;  
 $R$  — постоянная газа (для воздуха  $R = 29,27 \text{ м}^2/\text{с}^2$ ).  
 В политропическом процессе

$$\frac{p}{\gamma^n} = \text{const}, \quad (2-36)$$

где  $n$  — показатель политропы.  
 В изотермическом процессе

$$\frac{p}{\gamma} = \text{const}. \quad (2-37)$$

Исследования показывают, что формула (2-37) с точностью, достаточной для целей практики, справедлива только для давлений, меньших  $100 \text{ кг/см}^2$ . При больших давлениях имеет место значительное отступление от этого закона. Например, для воздуха при давлении  $100 \text{ кг/см}^2$  ошибка в определении объемного веса достигает почти 3% (в сторону его увеличения), а при  $1000 \text{ кг/см}^2$  почти 200% (в сторону уменьшения). Следует также иметь в виду, что закон Клапейрона-Менделеева нельзя экстраполировать на слишком низкие температуры.

### 2-7. Поверхностное натяжение и капиллярность

Поверхностное натяжение обуславливается силами взаимного притяжения молекул поверхностного слоя, стремящихся сократить свободную поверхность жидкости.

Благодаря действию сил поверхностного натяжения жидкость, имеющая криволинейную свободную поверхность, испытывает дополнительное усилие, увеличивающее или уменьшающее давление в жидкости на величину

$$\delta p_{пов} = \sigma \cdot \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (2-38)$$

где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\text{кг/м}$ . Значения  $\sigma$  приведены в табл. 2-9;

<sup>1</sup> Клапейрон — профессор Петербургского института путей сообщения — в 1834 г. доказал частный случай этого закона. Общий случай был указан Менделеевым в 1874 г. и опубликован в 1875 г.

$r_1$  и  $r_2$  — главные радиусы кривизны рассматриваемого элемента поверхности.

Таблица 2-9

Значения коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$  на границе с воздухом при нормальном атмосферном давлении 760 мм рт. ст.

Наименование жидкости	Температура, °C	$\sigma$ , кг/м
Вода . . . . .	20	0,0074
Бензины разные . . . . .	10-40	0,00247-0,00194
Керосин тракторный . . . . .	10-40	0,00279-0,00257
Дизельное топливо . . . . .	10-40	0,00296-0,00269

Увеличение давления происходит в тех случаях, когда поверхность жидкости выпукла, а уменьшение — поверхность жидкости вогнута. Благодаря изменению давления, вызванному поверхностным натяжением, возникает явление капиллярности. *Капиллярностью называется свойство жидкости подниматься или опускаться в трубках малого диаметра под действием дополнительного давления, вызванного силами поверхностного натяжения.*

Подъем жидкости происходит в трубке, поверхность которой смачивается жидкостью (например, вода — стекло), опускание — в трубке, поверхность которой жидкостью не смачивается (например, ртуть — стекло).

В стеклянной трубке диаметром  $d$  мм вода при температуре  $20^\circ \text{C}$  поднимается дополнительно на высоту  $h$ :

$$h = \frac{29,8}{d} [\text{мм}]. \quad (2-39)$$

В такой же трубке ртуть опускается на высоту:

$$h = \frac{10,15}{d} [\text{мм}]. \quad (2-40)$$

Влияние капиллярности приходится учитывать при работе с жидкостными приборами для измерения давления в некоторых случаях истечения жидкости из отверстий, а также в специальных вопросах гидравлики, например в вопросах фильтрации и др.



Глава третья

## ВВЕДЕНИЕ В ГИДРОСТАТИКУ

В гидростатике рассматривается жидкость, находящаяся в общем случае в состоянии относительного покоя. Под относительным покоем будем понимать такое состояние, при котором в движущейся жидкости отсутствуют перемещения отдельных ее частиц по отношению друг к другу. При этом жидкость перемещается как твердое тело. Само движение жидкости в этом случае можно называть переносным движением. Характерным для этого состояния будет постоянство формы объема жидкости.



Фиг. 3-1. Жидкость в резервуаре находится в «абсолютном покое».

Фиг. 3-2. Жидкость в движущейся цистерне находится в относительном покое.

Фиг. 3-3. Жидкость во вращающемся резервуаре находится в относительном покое.

Частным случаем относительного покоя является «абсолютный» покой, под которым будет подразумеваться покой жидкости относительно земли. Приведем несколько примеров:

- 1) абсолютный покой — жидкость находится в покое в резервуаре, неподвижном относительно земли (фиг. 3-1);
- 2) относительный покой: а) жидкость находится в покое относительно железнодорожной цистерны, которая вместе с жидкостью движется прямолинейно с некоторым ускорением (фиг. 3-2); б) жидкость находится в покое относительно резервуара, который вместе с жидкостью вращается с постоянной угловой скоростью (фиг. 3-3).

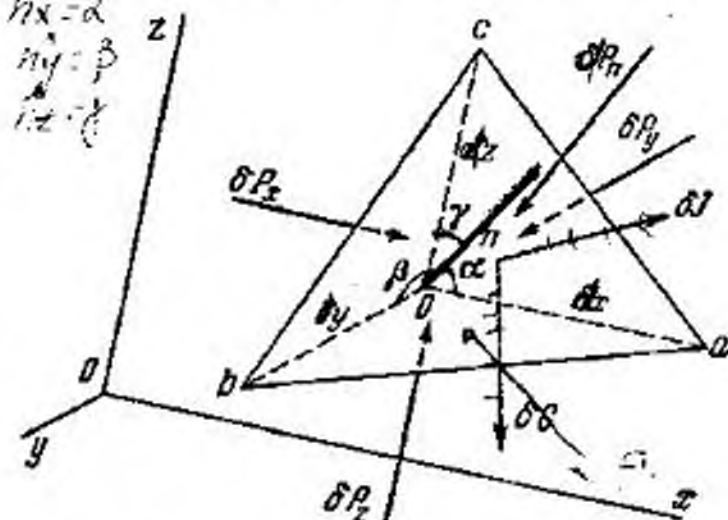
На жидкость, находящуюся в относительном покое, действуют массовые силы (сила тяжести и сила инерции переносного движения), а из поверхностных сил только силы давления.

### 3-1. Свойство гидростатического давления в точке

В объеме жидкости, находящейся в покое, который для общности будем полагать относительным, выделим произвольно расположенный элементарный тетраэдр с ребрами  $\delta x$ ,  $\delta y$  и  $\delta z$  (фиг. 3-4). Три грани этого тетраэдра перпендикулярны к соответствующим прямоугольным осям координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Углы, которые образуют с осями координат нормаль  $n$  к наклонной грани, обозначим через  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Площади граней обозначим индексом, соответствующим оси, перпендикулярной к грани. Эти площади будут равны:

$$\delta\omega_x = \frac{\delta y \delta z}{2}; \quad \delta\omega_y = \frac{\delta x \delta z}{2};$$

$$\delta\omega_z = \frac{\delta x \delta y}{2};$$



Фиг. 3-4. Схема сил, действующих на элементарный тетраэдр.

Площадь наклонной грани

$$\delta\omega_n = \frac{\delta\omega_x}{\cos \alpha} = \frac{\delta\omega_y}{\cos \beta} = \frac{\delta\omega_z}{\cos \gamma}.$$

На тетраэдр действует сила тяжести  $\delta G$ , сила инерции переносного движения  $\delta J$  и силы давления  $\delta P_i$ . Сила тяжести направлена вертикально; сила инерции переносного движения — в сторону, обратную ускорению переносного движения. Проекции этих сил на оси координат будут равны:

$$\delta J_x + \delta G_x = X \delta M;$$

$$\delta J_y + \delta G_y = Y \delta M;$$

$$\delta J_z + \delta G_z = Z \delta M,$$

где  $\delta M = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{6}$  — масса элементарного тетраэдра, а  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — сумма проекций на оси координат ускорений массовых сил (силы тяжести и силы инерции переносного движения). Силы давления действуют перпендикулярно к соответствующим граням и направлены внутрь тетраэдра. Согласно формуле (2-1) на грань  $Obc$  действует сила, параллельная оси  $x$  и равная:

$$\delta P_x = \rho_{ср x} \delta\omega_x.$$

На грань  $Oac$  действует сила, параллельная оси  $y$  и равная:

$$\delta P_y = \rho_{ср y} \delta\omega_y.$$



На грань  $Oab$  действует сила, параллельная оси  $z$  и равная:

$$\delta P_z = \rho_{срz} \delta \omega_z.$$

На грань  $abc$  действует сила, параллельная нормали  $n$  и равная

$$\delta P_n = \rho_{срn} \delta \omega_n.$$

Рассматриваемый тетраэдр находится в покое. Поэтому действующие на тетраэдр силы должны находиться в равновесии.

Пользуясь принципом затвердения, согласно которому равновесие жидкого тела не нарушится, если предположить его затвердевшим, можно применить условия равновесия сил, приложенных к твердому телу. Одним из условий равновесия системы сил является равенство нулю суммы их проекций на оси координат:

$$\sum (\text{проекций сил})_x = 0, \quad \sum (\text{проекций сил})_y = 0 \quad \text{и} \quad \sum (\text{проекций сил})_z = 0.$$

Составим уравнение проекций сил на ось  $x$ :

$$\delta P_x - \delta P_n \cos \alpha + X \delta M = 0.$$



Подставляя значения входящих сюда величин, будем иметь:

$$\rho_{срx} \frac{\delta y \delta z}{2} - \rho_{срn} \frac{\delta y \delta z}{2} + X \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{6} = 0, \quad \rho_x \delta x$$

сократив на  $\frac{\delta y \delta z}{2}$ , получим:

$$\rho_{срx} - \rho_{срn} + \frac{1}{3} X \rho \delta x = 0.$$

С приближением размеров тетраэдра к нулю  $\rho_{срx}$  и  $\rho_{срn}$  будут стремиться к значениям гидростатического давления в точке в направлениях оси  $x$  —  $\rho_x$  и нормали  $n$  —  $\rho_n$ , а вследствие этого при переходе к пределу при  $\delta x = 0$  получаем, что

$$\rho_x - \rho_n = 0, \quad \text{или} \quad \rho_x = \rho_n.$$

Составляя уравнения проекций сил на оси  $y$  и  $z$ , найдем, что

$$\rho_y = \rho_n, \quad \rho_z = \rho_n,$$

откуда следует:

$$\rho_x = \rho_y = \rho_z = \rho_n. \quad (3-1)$$

Последнее равенство выражает, что гидростатическое давление в точке покоящейся жидкости имеет значение, не зависящее от направления площадки, для которой оно вычислено. Но гидростатическое давление во всех направлениях одинаково.

ростатическое давление в различных точках жидкости будет неодинаково.

В гидростатике рассматривается только стационарное состояние жидкости. В этом случае каждая точка объема характеризуется определенным значением давления, что обычно и записывается в виде:

$$p = p(x, y, z). \quad (3-2)$$

Однако при этом необходимо иметь в виду, что функция  $p$ , кроме координат, должна включать некоторые начальные условия, а также физические величины, влияющие на значения давления. Такими величинами являются плотность жидкости и ускорения массовых сил. Размерность всех величин, от которых зависит  $p$ , должна позволить в определенной комбинации получить размерность давления  $p$ .

Каждому состоянию относительного покоя (фиг. 3-1—3-3) соответствует и свое конкретное выражение функции  $p$ , зависящее также и от расположения системы координат. Отысканию вида этой функции, т. е. отысканию закона распределения гидростатического давления по объему жидкости будут посвящены следующие параграфы.

### 3-2. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера)

В объеме жидкости, находящейся в покое, выделим элементарный прямоугольный параллелепипед с ребрами  $\delta x$ ,  $\delta y$  и  $\delta z$  (фиг. 3-5), параллельными произвольно расположенным осям координат. Площади граней параллелепипеда, перпендикулярные к соответствующим осям координат, обозначим, как ранее. Они будут равны:

$$\delta \omega_x = \delta y \delta z; \quad \delta \omega_y = \delta x \delta z; \quad \delta \omega_z = \delta x \delta y.$$

На параллелепипед действует массовая сила — сила тяжести и в общем случае — также сила инерции переносного движения. Проекция этих сил на оси координат будут равны:

$$\delta J_x + \delta G_x = X \delta M,$$

$$\delta J_y + \delta G_y = Y \delta M,$$

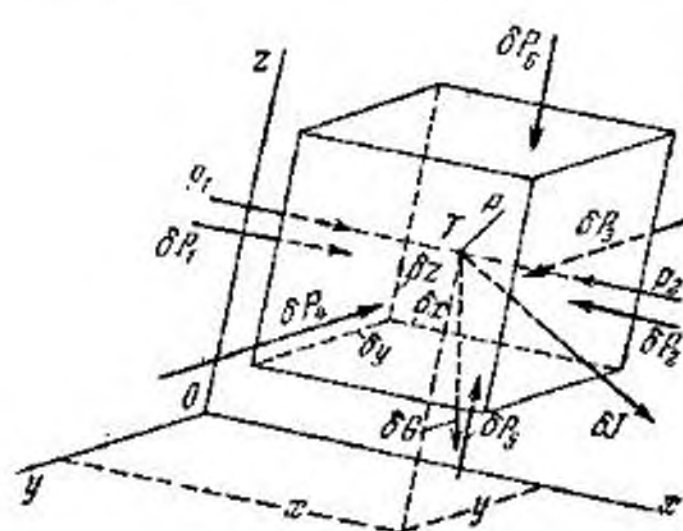
$$\delta J_z + \delta G_z = Z \delta M,$$

где  $\delta M = \rho \delta W$  — масса элементарного параллелепипеда;  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — алгебраические суммы проекций на оси координат ускорения силы тяжести и ускорения силы инерции переносного движения.



Кроме названных массовых сил, на параллелепипед действуют поверхностные силы — силы давления  $\delta P_i$ .

Силы давления действуют перпендикулярно к соответствующим граням и направлены внутрь рассматриваемого параллелепипеда.



Фиг. 3-5. Схема сил, действующих на элементарный параллелепипед.

Рассматриваемый параллелепипед находится в покое. Поэтому действующие на параллелепипед силы находятся в равновесии.

Составим уравнение проекций сил на ось  $x$ :

$$\delta P_1 - \delta P_2 + X \delta M = 0. \quad (3-3)$$

Обозначим координаты центра параллелепипеда  $T$  через  $x$ ,  $y$  и  $z$ , а гидростатическое давление в центре — через  $p$ :

$$p = p(x, y, z).$$

При этом гидростатическое давление  $p_1$  в центре левой грани, отстоящей от центра параллелепипеда на расстоянии  $\frac{1}{2} \delta x$ , будет равно:

$$p_1 = p \left( x - \frac{1}{2} \delta x, y, z \right),$$

или

$$p_1 = p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \delta x.$$

Аналогично для гидростатического давления  $p_2$  в центре правой грани, отстоящей от центра параллелепипеда на расстоянии  $\frac{1}{2} \delta x$ , получим:

$$p_2 = p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \delta x.$$

Силы  $\delta P_1$  и  $\delta P_2$  вычислим по формулам<sup>1</sup>:

$$\delta P_1 = p_1 \delta y \delta z;$$

$$\delta P_2 = p_2 \delta y \delta z,$$

откуда

$$\delta P_1 - \delta P_2 = (p_1 - p_2) \cdot \delta y \delta z = - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \delta x \delta y \delta z = - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \delta W. \quad (3-4)$$

<sup>1</sup> Для определения сил  $\delta P_1$  и  $\delta P_2$  надо было бы знать среднее давление по соответствующим площадкам. В общем случае эти средние давления отличаются от давлений в центре площадок  $p_1$  и  $p_2$ . Однако, учитывая, что в дальнейшем надо будет перейти к пределу, когда рассматриваемый параллелепипед будет стремиться к точке, примем эти давления за средние.

Подставляя найденные значения в уравнение (3-3), будем иметь:

$$- \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \delta W + X \rho \delta W = 0,$$

сокращая на  $\delta W$  и переходя к пределу, получим:

$$\rho X - \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Аналогично рассуждая, но проектируя силы на ось  $y$  и на ось  $z$ , получим еще два уравнения равновесия. Всего, таким образом, будем иметь три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

Использование уравнений моментов позволило бы доказать, что рассматриваемая система сил сходится в одной точке.

Для лучшего понимания смысла полученных уравнений точным гидравлический смысл частного дифференциала и частной производной от давления:  $\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \delta x$  — частный дифференциал давления по  $x$  определяет собою изменение (увеличение или уменьшение) давления при переходе от одной точки к другой на расстоянии  $\delta x$  вдоль оси  $x$ . Частная производная от давления по координате определяет изменение давления в точках, расположенных вдоль соответствующей оси, приходящееся на единицу длины.

Уравнения (3-5) можно заменить одним. Для этого умножим каждое соответственно на  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  и сложим. Получим:

$$X dx + Y dy + Z dz - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \right) = 0.$$

Так как гидростатическое давление есть функция только координат, выражение в скобках представляет полный дифференциал гидростатического давления:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz. \quad (3-6)$$

В связи с этим получим одно дифференциальное уравнение для жидкости, находящейся в относительном покое, в виде:

$$dp = \rho (X dx + Y dy + Z dz). \quad (3-7)$$



Уравнения (3-5) и (3-7) называются дифференциальными уравнениями равновесия жидкости. Они были получены Л. Эйлером в 1755 г. Покажем, что минус  $dp$  можно рассматривать как работу, производимую силами давления на перемещениях,  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  и отнесенную к единице объема. Для этого вычислим работу сил  $\delta P_i$  по формуле

$$dA_\delta = (\delta P_1 - \delta P_2) \cdot dx + (\delta P_3 - \delta P_4) \cdot dy + (\delta P_5 - \delta P_6) \cdot dz.$$

Подставляя значения сил  $\delta P_i$ , согласно формуле (3-4) найдем:

$$dA_\delta = - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot dW,$$

откуда

$$\frac{dA_\delta}{dW} = - dp. \quad (3-8)$$

Каждое из уравнений (3-5) в отдельности позволяет определить закон распределения гидростатического давления  $p$  вдоль соответствующей оси координат. Совокупность двух уравнений определяет закон распределения гидростатического давления  $p$  в соответствующей плоскости. Совокупность трех уравнений или уравнение (3-7) позволяет определить закон распределения гидростатического давления  $p$  в объеме. Уравнения (3-5) и (3-7) справедливы для капельной жидкости и газа, причем для газов дополнительным уравнением является уравнение состояния (2-35).

Полученные выше в координатной форме уравнения Эйлера можно представить в векторной форме, а именно

$$\vec{j} + \vec{g} - \frac{1}{\rho} \cdot \text{grad}(p) = 0, \quad (3-9)$$

где  $\vec{j}$  — вектор ускорения силы инерции переносного движения;

$\text{grad}(p)$  — градиент давления.

В справедливости этого уравнения легко убедиться, спроектировав его на оси координат, в результате чего получаются уравнения в координатной форме<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> При этом следует иметь в виду, что градиент давления  $\text{grad}(p)$  представляет собой вектор, проекция которого на любую ось равна частной производной от давления по соответствующему направлению. Например, проекция градиента на ось  $x$  равна:

$$(\text{grad } p)_x = \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Из уравнения (3-9) следует, что направление ускорения равнодействующей массовых сил является тем направлением, в котором гидростатическое давление максимально возрастает. Из того же выражения следует, что в направлении, перпендикулярном к направлению ускорения равнодействующей массовых сил, давление имеет одно и то же значение.

#### Глава четвертая

### ГИДРОСТАТИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ ДЛЯ ЖИДКОСТИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В «АБСОЛЮТНОМ» ПОКОЕ

В этой главе рассматривается жидкость, находящаяся в покое относительно земли, причем в рассматриваемых вопросах вращение самой земли не принимается во внимание. Поэтому на результаты исследований оказывают влияние лишь силы гидростатического давления и силы тяжести. Для этого случая

$$X = g_x; \quad Y = g_y; \quad Z = g_z.$$

Изучение законов равновесия газов будет приведено в гл. 26. В настоящей главе в дальнейшем будут рассмотрены только капельные жидкости.

#### 1. Основное уравнение гидростатики и поверхности равного давления для несжимаемой жидкости, подверженной действию сил тяжести и давления

Для получения основного уравнения гидростатики воспользуемся дифференциальным уравнением равновесия (3-7)

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Расположим оси координат так, чтобы ось  $z$  была направлена вертикально вверх (фиг. 4-1). Так как при этом

$$X = 0, \quad Y = 0 \quad \text{и} \quad Z = -g,$$

это уравнение можно представить в виде:

$$dp = -\rho g dz.$$

Поскольку  $\rho g = \gamma$ , а объемный вес  $\gamma$  так же, как и плотность  $\rho$ , для несжимаемой однородной жидкости есть величина постоянная, предыдущее выражение можно записать и так:

$$dp = -\gamma dz, \quad (4-1)$$

или

$$d\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = 0,$$



откуда

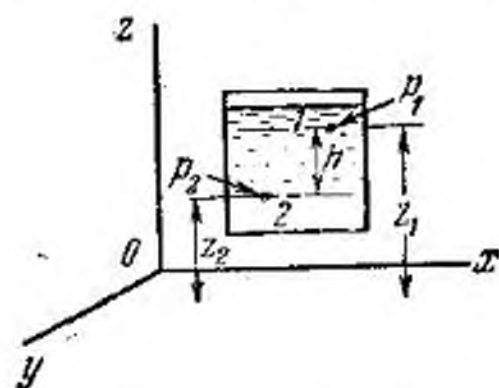
$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{idem}^* \quad (4-2)$$

Уравнение (4-2) справедливо для любых точек одного и того же объема однородной капельной жидкости, находящейся в равновесии. В этом уравнении давление  $p$  может быть и абсолютным и избыточным.

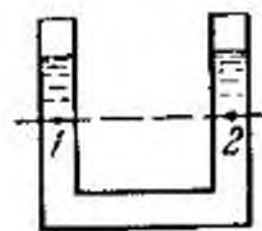
Для двух частиц с координатами  $z_1$  и  $z_2$  уравнению (4-2) можно придать вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \quad (4-3)$$

Уравнение (4-3) будем называть основным уравнением гидростатики. Из этого уравнения следует, что в одном и том же объеме покоящейся однородной жидкости все частицы, расположенные в одной и той же горизонтальной плоскости, имеют одно и то же гидростатическое давление, т. е. горизонтальные плоскости являются поверхностями равного давления.



Фиг. 4-1. Ось  $z$  направлена вертикально.



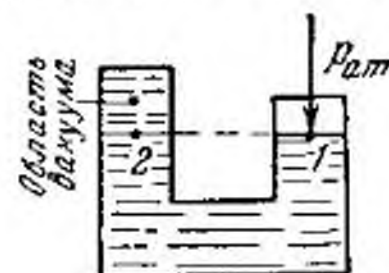
Фиг. 4-2. Сообщающиеся сосуды, заполненные однородной жидкостью.

Заметим, что под одним и тем же объемом жидкости следует понимать такой объем однородной жидкости, две любые частицы которого могут быть соединены линией, не выходящей за пределы этого объема. Так, например, объемы жидкости, заполняющие так называемые сообщающиеся сосуды, изображенные на фиг. 4-2 или 4-3, могут рассматриваться каждый как один и тот же объем. Для таких объемов давление в точках 1 и 2, расположенных на одном и том же горизонтальном уровне, будут равны. Отсюда также следует, что в сообщающихся сосудах с одинаковым давлением на свободной поверхности (фиг. 4-2) уровни однородной жидкости в обоих сосудах располагаются на

\* Idem (идем) здесь и в дальнейшем употребляется только в смысле «одно и то же», т. е. имеющее одно и то же значение в рассматриваемой области (в объеме или на линии) лишь в данный момент времени, в отличие от const, означающей постоянство величины во времени.

одной и той же высоте, так как свободные поверхности представляют поверхности равного давления.

Примером более сложных объемов будут объемы жидкости  $A$  и  $B$  с присоединенным к ним дифференциальным ртутным ма-



Фиг. 4-3. Горизонтальные плоскости являются поверхностями равного давления.



Фиг. 4-4. Схема дифференциального ртутного манометра.

нометром (фиг. 4-4). Точки  $A$  и  $B$  этих объемов уже не могут быть соединены линией, не выходящей за пределы только одной жидкости. Поэтому в общем случае давления в точках  $A$  и  $B$ , расположенных на одном и том же уровне, не будут равны между собой.

#### 4-2. Определение величины абсолютного и избыточного гидростатического давлений в любой точке несжимаемой жидкости. Закон Паскаля

Для определения давления в любой точке жидкости, находящейся в равновесии (фиг. 4-1), воспользуемся основным уравнением гидростатики (4-3).

Решая это уравнение и обозначая разность глубин погружения точек 1 и 2 через  $h = z_1 - z_2$ , получим:

$$p_2 = p_1 + \gamma h, \quad (4-4)$$

или

$$p_1 = p_2 - \gamma h. \quad (4-5)$$

Из формул (4-4) и (4-5) следует, что для определения давления в произвольной точке жидкости необходимо знать давление в какой-либо другой точке, принадлежащей тому же объему, а также глубину погружения одной точки относительно другой.

Если точка 1 взята на поверхности, где давление равно атмосферному давлению, т. е. где  $p_1 = p_{atm}$ , формула для определения избыточного давления в любой точке обратится в

$$p_u = \pm \gamma h, \quad (4-6)$$

где  $h$  — глубина точки от свободной поверхности жидкости, а знак минус соответствует вакууму (фиг. 4-3).



В этом случае величина избыточного давления зависит только от высоты столба жидкости. Следует обратить внимание, что числовое значение  $\gamma \cdot h$  можно рассматривать как вес столба жидкости высотой  $h$  с площадью поперечного сечения, равной единице. Но при этом нужно помнить, что величина  $\gamma \cdot h$  имеет размерность  $\text{кг}/\text{м}^2$ .

Из изложенного следует, что в жидкости, находящейся в абсолютном покое, разность давлений в различных точках жидкости обуславливается только влиянием веса жидкости. В тех случаях, когда влияние веса невелико и им можно пренебречь, гидростатическое давление во всех точках рассматриваемого покоящегося объема можно считать одинаковым.

Из формул (4-4) и (4-5) следует закон Паскаля, согласно которому давление, создаваемое в любой точке несжимаемой жидкости, находящейся в покое и продолжающей оставаться в покое, передается одинаково во всем объеме жидкости.

Действительно, при увеличении давления, например (фиг. 4-3) в точке, 1, на величину  $\delta p$  на столько же увеличится давление и в другой любой точке объема.

#### 4-3. Эпюра гидростатического давления

Изобразим графически (фиг. 4-5) изменение гидростатического давления в зависимости от глубины вдоль какой-либо плоской стенки, наклоненной к горизонту под углом  $\theta$ . В точке  $O$ , находящейся на поверхности жидкости, давление примем равным  $p_0$ . В точке, находящейся на глубине  $h$  от поверхности жидкости, давление будет равно:

$$p = p_0 + \gamma h.$$

Последнее выражение может быть представлено в виде:

$$p = p_0 + \gamma \sin \theta l, \quad (4-7)$$

где  $l$  — расстояние рассматриваемой точки от точки  $O$ .

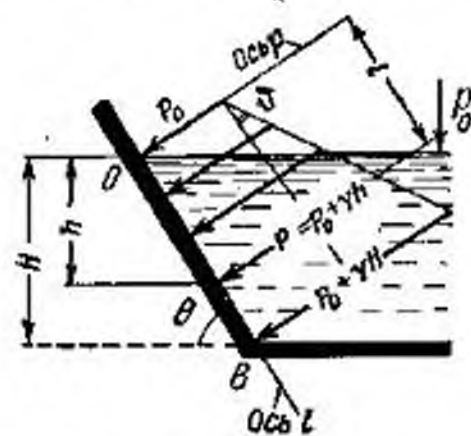
Если выбрать оси координат, как показано на фиг. 4-5, то графически зависимость

$$p = p(l)$$

изобразится прямой линией, наклоненной к оси абсцисс (оси  $l$ ) под углом  $\theta$ , тангенс которого

$$\text{tg } \theta = \gamma \sin \theta. \quad (4-8)$$

Для построения этой линии достаточно знать давление лишь в двух точках рассматриваемого сечения. Изобразив эти давле-

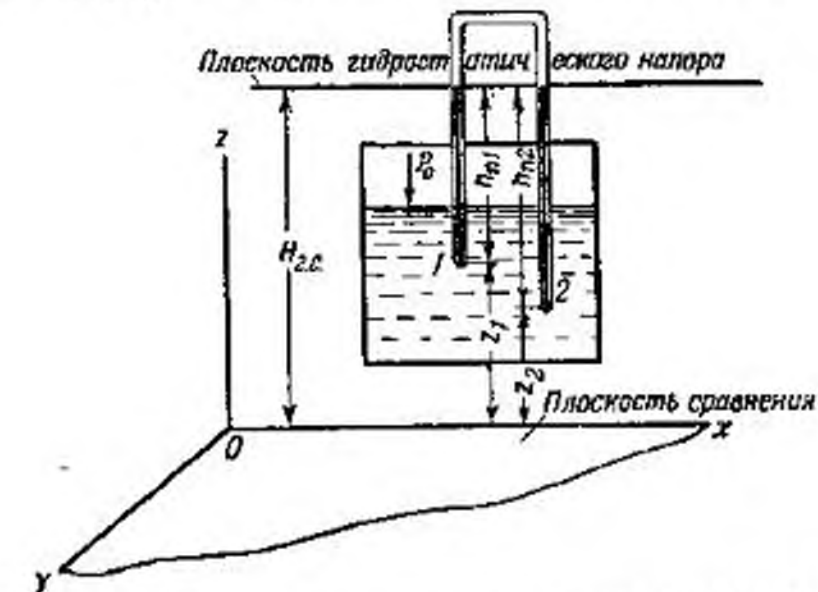


Фиг. 4-5. Графическое изображение закона распределения гидростатического давления по глубине.

ния в виде перпендикуляров в соответствующих точках и соединив концы этих перпендикуляров прямой линией, получим эпюру гидростатического давления. В любой промежуточной точке гидростатическое давление будет измеряться длиной перпендикуляра, восстановленного в данной точке до пересечения с прямой эпюры.

#### 4-4. Гидростатический напор

Физический смысл закона, выражаемого формулой (4-2), может быть весьма наглядно показан на схеме, приведенной на фиг. 4-6. В точках 1 и 2 установлены две стеклянные трубки, соединенные сверху между собой. Предположим, что воздух и



Фиг. 4-6. Жидкость в пьезометрических трубках поднимается до одного и того же уровня.

пары жидкости, заполняющие верхнюю часть стеклянных трубок, полностью выкачаны. Тогда в образовавшемся безгазовом пространстве давление будет равно нулю. Пренебрегая капиллярностью, высоту подъема жидкости в обеих трубках вычислим по формуле

$$h_{n_1} = \frac{p_1}{\gamma} \quad \text{и} \quad h_{n_2} = \frac{p_2}{\gamma}. \quad (4-9)$$

Тогда на основании формулы (4-3) в соответствии с (4-9) получим:

$$z_1 + h_{n_1} = z_2 + h_{n_2},$$

откуда следует, что в обеих трубках жидкость поднимается до одного и того же уровня, высоту которого обозначим через  $H_{zc}$ :

$$H_{zc} = z + \frac{p}{\gamma} = \text{idem}. \quad (4-10)$$



Имеющая одно и то же значение для одного и того же объема жидкости величина  $H_{zc}$  называется полным гидростатическим напором,  $z$  — геометрическим напором или геометрической высотой,  $\frac{p}{\gamma}$  — пьезометрическим напором или пьезометрической высотой. Заметим, что в этом выражении  $p$  является абсолютным давлением.

Уровень  $H_{zc}$  определяет горизонтальную плоскость, называемую плоскостью гидростатического напора. Эта плоскость соответствует абсолютному давлению.

Если бы стеклянные трубки вверху были открыты, то жидкость в них поднялась бы ниже на величину  $\frac{p_{atm}}{\gamma}$ . Уровни жидкости оказались также на одной высоте в плоскости, соответствующей избыточному давлению. Величину

$$H_u = z + \frac{p_u}{\gamma} \quad (4-11)$$

будем называть гидростатическим напором, соответствующим избыточному давлению, а величину  $\frac{p_u}{\gamma}$  — пьезометрическим напором или пьезометрической высотой, соответствующей избыточному давлению.

Гидростатический напор равен удельной потенциальной энергии покоящейся жидкости. Под удельной энергией подразумевается энергия, отнесенная к единице веса жидкости (к 1 кг).

В самом деле, численное значение потенциальной энергии некоторой частицы равно той работе, которую могут совершить силы, действующие на частицу при перемещении ее из данного положения в такое, в котором потенциальная энергия равна нулю. На частицу действуют сила тяжести и давление. На уровне координатной плоскости  $хоу$  будем условно считать потенциальную энергию положения равной нулю. При этом работа, которую совершит сила тяжести, будет равна:

$$A_m = \delta G z,$$

где  $z$  — вертикальная координата рассматриваемой частицы;  
 $\delta G$  — ее вес.

Силы, обуславливающиеся гидростатическим давлением, могут проявить свое действие различным образом. В том случае, если над данной частицей установлена трубка, из которой выкачан воздух, частица жидкости весом  $\delta G$  поднимается до плоскости гидростатического напора на высоту  $\frac{p}{\gamma}$ , на уровне которой  $p = 0$ . Для вычисления работы, производимой при этом

силами давления, воспользуемся уравнением (3-8), проинтегрировав его в пределах от  $p$  до  $p = 0$ . При этом получим:

$$A_d = -\frac{\delta G}{\gamma} \int_p^0 dp = \delta G \frac{p}{\gamma}.$$

Таким образом, суммарная работа, которую могут совершить силы, действующие на частицу с весом  $\delta G$ , численно равная ее потенциальной энергии, будет равна:

$$\pi = A_m + A_d,$$

или

$$\pi = \delta G \left( z + \frac{p}{\gamma} \right). \quad (4-12)$$

Если отнести потенциальную энергию к единице веса, найдем удельную потенциальную энергию, которая будет равна гидростатическому напору

$$\pi_y = z + \frac{p}{\gamma} = H_{zc}. \quad (4-13)$$

Из выражения гидростатического напора следует, что все частицы одного и того же объема однородной покоящейся жидкости обладают одинаковой удельной потенциальной энергией.

Эта удельная потенциальная энергия складывается из двух частей:  $z$  — удельной потенциальной энергии положения;  $\frac{p}{\gamma}$  — удельной потенциальной энергии давления.

При этом следует отметить, что величина удельной потенциальной энергии давления  $\frac{p}{\gamma}$  имеет конкретное для данной точки значение, определяемое гидростатическим давлением и объемным весом. Этого нельзя сказать о потенциальной энергии положения. Энергия положения измеряется вертикальной координатой  $z$ , отсчитываемой от произвольной горизонтальной плоскости сравнения, на уровне которой условно считаем потенциальную энергию положения равной нулю. При этом полезно вспомнить из механики, что произвольность выбора уровня с потенциальной энергией, равной нулю, оправдывается тем, что для приложений важно знать не столько величину потенциальной энергии в данной точке, сколько разность ее между двумя точками, каковая, конечно, не будет зависеть от положения плоскости сравнения.



## 4-5. Условия равновесия разнородных жидкостей

Рассмотрим равновесие двух различных жидкостей с объемным весом  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Определим форму поверхности их раздела. Для этого воспользуемся уравнением (4-1)

$$dp = -\gamma dz.$$

Так как на поверхности раздела, являющейся общей для двух жидкостей,  $dp$  имеет одно и то же значение для обеих жидкостей, то для обеих жидкостей справедливо равенство

$$\gamma_1 dz = \gamma_2 dz,$$

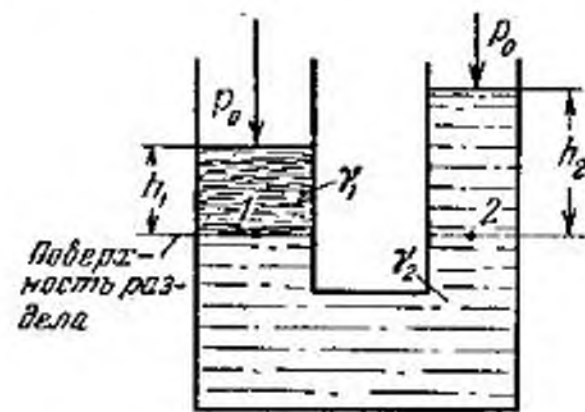
что при  $\gamma_1 \neq \gamma_2$  возможно только если  $dz = 0$ , откуда следует, что  $z = \text{const}$  или что *поверхностью раздела двух соприкасающихся различных жидкостей является горизонтальная плоскость*. Поэтому она является также и поверхностью равного давления. Последнее следует также и из того, что при  $dz = 0$  и  $dp = 0$ .

## 4-6. Сообщающиеся сосуды

На фиг. 4-2 были рассмотрены сообщающиеся сосуды, заполненные одной и той же жидкостью. Здесь рассмотрим те же сосуды, но заполненные (фиг. 4-7) жидкостями с объемными весами  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

Для каждой жидкости в отдельности справедливо уравнение (4-4). Воспользуемся им для определения отношения высот столбов жидкости  $h_1$  и  $h_2$ . Рассмотрим случай, когда на свободной поверхности обеих жидкостей давления одинаковы и равны  $p_0$ .

Так как поверхность раздела является поверхностью равного давления, то для двух точек 1 и 2 будут справедливы следующие зависимости:



$$\begin{aligned} p_1 &= p_2, \\ p_1 &= p_0 + \gamma_1 h_1, \\ p_2 &= p_0 + \gamma_2 h_2, \end{aligned} \quad \text{откуда}$$

$$\gamma_1 h_1 = \gamma_2 h_2, \quad (4-14)$$

или

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1},$$

т. е. *в сообщающихся сосудах с одинаковым давлением на свободной поверхности высоты столбов обратно пропорциональны объемным весам жидкостей*.

Фиг. 4-7. Сообщающиеся сосуды, заполненные различными несмешивающимися жидкостями. Поверхность раздела есть горизонтальная плоскость.

## 4-7. Жидкостные приборы для измерения давления

Приборы, служащие для измерения давления в жидкостях, как правило, являются дифференциальными, так как измеряют не абсолютное давление, а разность давлений в точках двух сред. Исключение представляют приборы для измерения атмосферного давления — барометры. Остальные типы приборов в зависимости от их назначения называются:

манометры — для измерения избыточного давления, т. е. разности между абсолютным и атмосферным давлениями; вакуумметры — для измерения вакуума, т. е. разности между атмосферным и абсолютным давлениями; дифференциальные манометры — для измерения произвольной разности давлений в двух произвольных точках.

По принципу действия приборы бывают жидкостные, пружинные, поршневые, электрические и комбинированные. Наибольшее распространение получили пружинные и жидкостные приборы, причем последние, так же как и поршневые, главным образом в лабораторной практике.

Рассмотрим кратко схемы лишь жидкостных приборов. Подробнее о приборах можно прочесть в ряде руководств<sup>1</sup>.

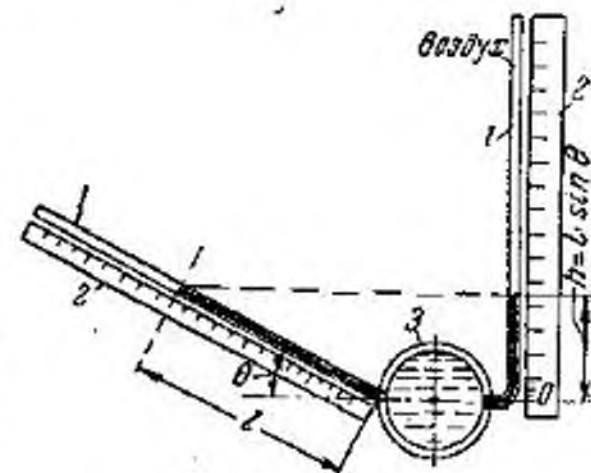
В своем простейшем виде жидкостный манометр, называемый пьезометром (фиг. 4-8), состоит из вертикальной или для малых давлений наклонной стеклянной трубки 1 с внутренним диаметром не менее 5 мм и шкалы 2. Верхний конец трубки открыт и сообщает внутреннюю полость трубки с атмосферой. Нижний конец трубки присоединяется к резервуару 3 с жидкостью, в которой измеряется давление. Жидкость, находящаяся под давлением, заполняет трубки, поднимаясь в них на некоторую высоту.

Абсолютное давление  $p_{аб}$  на уровне нуля шкалы манометра может быть определено по формуле (если пренебречь капиллярностью)

$$p_{аб} = p_{атм} + \gamma h = p_{атм} + \gamma l \sin \theta. \quad (4-15)$$

<sup>1</sup> М. К. Жоховский, Техника измерения давления и разрежения, Машгиз, 1952.

Н. З. Френкель, Руководство к лабораторным работам по курсу гидравлики и насосов, издание Военной ордена Ленина академии Стрелковских и механизированных войск Советской Армии имени И. В. Сталина, 1947.



Фиг. 4-8. Пьезометр с вертикальной и наклонной трубками.



Избыточное давление на том же уровне вычисляется по формуле

$$p_a = \gamma h = \gamma l \sin \theta. \quad (4-16)$$

Весьма часто давление условно определяют высотой столба жидкости в манометрической трубе. Например, когда говорят, что давление равно 7,1 м вод. ст. или 522,0 мм рт. ст., — это значит, что данное давление может быть создано водяным столбом высотой  $h = 7,1$  м или ртутным столбом высотой  $h = 522$  мм. Величина же давления в  $\text{кг/м}^2$  определится по формуле

$$p = \gamma h,$$

где  $\gamma$  — объемный вес жидкости,  $\text{кг/м}^3$ ;  
 $h$  — высота столба жидкости, соответствующего давлению, м.

Для того чтобы давление  $p$  выразить высотой столба жидкости, надо вычислить  $h$  по формуле

$$h = \frac{p}{\gamma}. \quad (4-17)$$

Из этой формулы следует, что одному и тому же давлению будут соответствовать в зависимости от объемного веса разные высоты столбов жидкости (табл. 4-1).

Таблица 4-1

Значение высоты столба жидкости (ртути, воды, масла, керосина, бензина и воздуха) соответствующее  $p = 1 \text{ кг/см}^2 = 10\,000 \text{ кг/м}^2$

Род жидкости	Ртуть	Вода	Масло	Керосин	Бензин	Воздух
Объемный вес $\gamma$ , $\text{кг/м}^3$ . . . . .	13 600	1 000	920	800	750	1,2
Высота столба жидкости $h$ , м . . . . .	0,735	10	10,87	12,5	13,33	8 333

Для измерения давлений больше  $0,3 \text{ кг/см}^2$  в качестве рабочей жидкости следует применять ртуть. На фиг. 4-9 показана схема ртутно-чашечного манометра. В этом приборе обычно нуль на шкале совпадает с уровнем ртути в резервуаре 1 при  $h = 0$ . Поэтому размеры этого резервуара должны быть таковы, чтобы понижением уровня в нем при  $h \gg 0$  можно было пренебречь. В противном случае нужно считаться с понижением нулевого уровня. Абсолютное давление на уровне нуля шкалы прибора 2 (капиллярностью пренебрегаем) определяется по формуле

$$p_{аб} = p_{ат} + \gamma_p h,$$

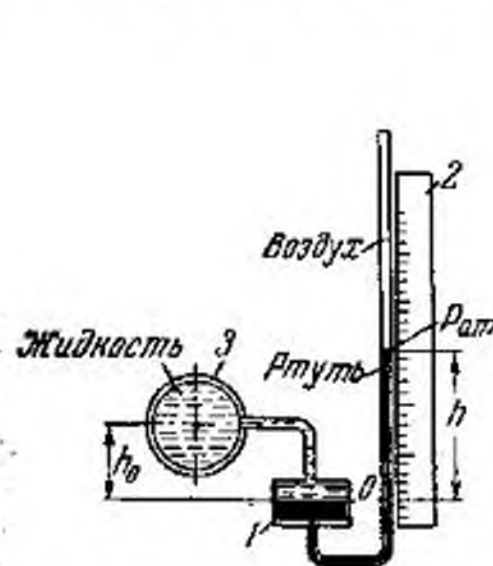
Давление  $p$  в центре резервуара 3 вычисляется по формуле

$$p_i = p_{ат} + \gamma_p h - \gamma h_0, \quad (4-18)$$

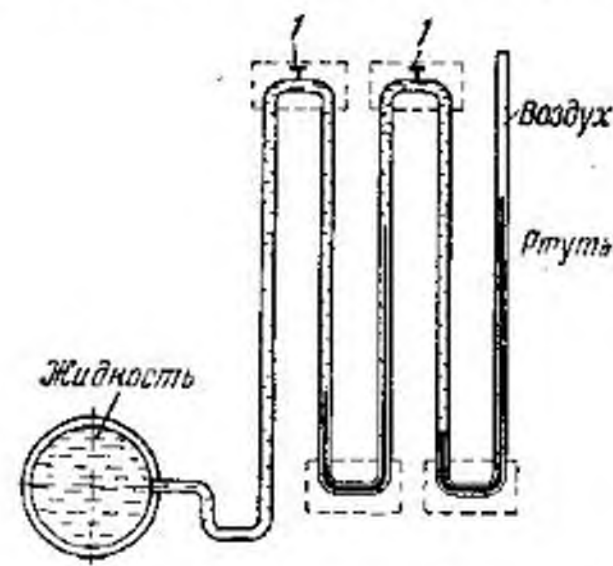
где  $\gamma h_0$  можно рассматривать как поправку к показаниям прибора, обусловленную его расположением по отношению к точке, давление в которой определяется.

Для измерения давлений, превышающих  $3-4 \text{ кг/см}^2$ , может служить батарейный манометр, схема которого показана на фиг. 4-10.

Разность давлений  $\delta p$  в двух точках может быть измерена посредством дифференциального манометра. На фиг. 4-11 пока-



Фиг. 4-9. Схема ртутно-чашечного манометра.



Фиг. 4-10. Схема батарейного ртутного манометра.

1—краны для спуска воздуха

зан дифференциальный манометр, представляющий собой два обыкновенных пьезометра (и поэтому называемый дифференциальным пьезометром), соединенных сверху между собой. При любом давлении в газовом пространстве пьезометра (в этом приборе обычно пренебрегают влиянием веса газа) разность давлений  $\delta p$  в двух точках 1 и 2 одинаковой жидкости, расположенных на одной и той же высоте, определяется по формуле

$$\delta p = \gamma h, \quad (4-19)$$

где  $h$  — показание манометра;  
 $\gamma$  — объемный вес жидкости.

При больших разностях давлений в качестве рабочей жидкости в дифференциальном манометре применяется ртуть. Схема ртутного дифференциального манометра показана на фиг. 4-12. Разность давлений в двух точках 1 и 2 одинаковой

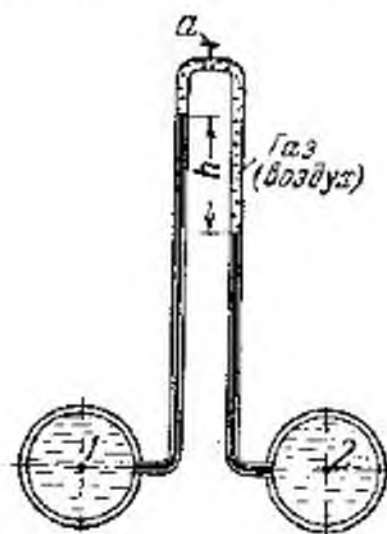


жидкости, расположенных на одной высоте, определяется по формуле

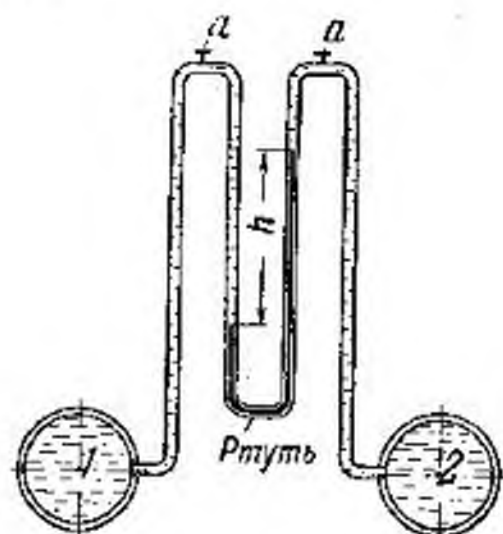
$$\delta p = (\gamma_p - \gamma) h. \quad (4-20)$$

Вывод этой формулы разобран в задаче 4-5.

При малых разностях давлений применяется дифференциальный манометр, изображенный на фиг. 4-13. Верхняя часть его заполнена не газом, а рабочей жидкостью, объемный вес которой  $\gamma_{раб}$  меньше  $\gamma$  жидкости.



Фиг. 4-11. Схема дифференциального пьезометра.  
а — край для подкачки или спуска сжатого воздуха.



Фиг. 4-12. Схема дифференциального ртутного манометра.  
а — краны для спуска воздуха.

Разность давлений в двух точках 1 и 2 одинаковой жидкости, расположенных на одной высоте, определяется по формуле

$$\delta p = (\gamma - \gamma_{раб}) h. \quad (4-21)$$

При значениях  $\gamma_{раб}$  близких к  $\gamma$ , даже при малых разностях давлений показания прибора могут быть весьма велики, чем достигается большая точность измерения давления. В качестве рабочей жидкости можно применять керосин, масло и т. п.

Жидкостные манометры отличаются высокой точностью измерений, но благодаря их громоздкости при измерении больших давлений применяются главным образом в лабораторной практике.

Для измерения вакуума также применяются жидкостные и пружинные вакуумметры.

На фиг. 4-14 изображен ртутно-чашечный вакуумметр. Вакуум на уровне нуля шкалы прибора вычисляется по формуле

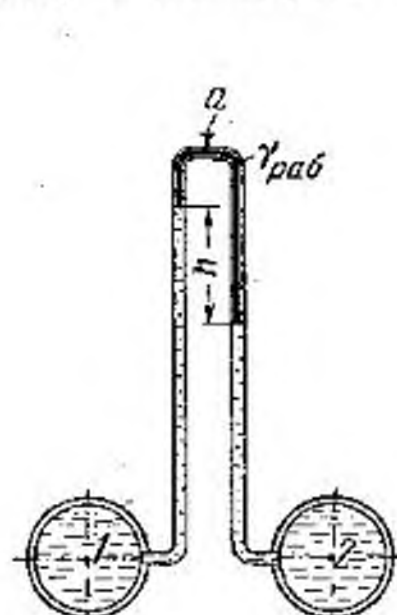
$$p_v = \gamma_p h_v.$$

Вакуум в центре резервуара А, если соединительная трубка 2 полностью заполнена жидкостью из резервуара А, вычисляется по формуле

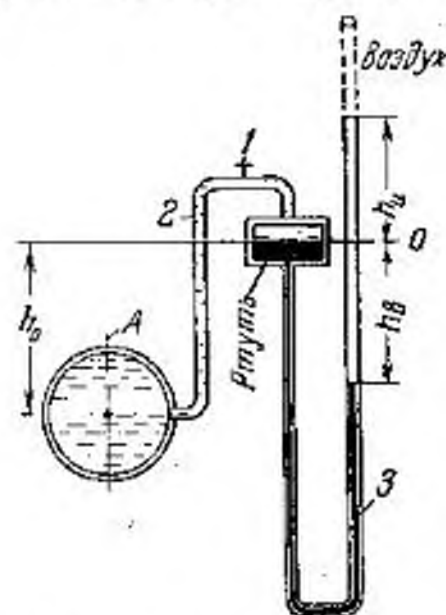
$$p_v = \gamma_p h_v - \gamma h_0, \quad (4-22)$$

где  $\gamma$  — объемный вес жидкости в резервуаре.

В этой формуле  $\gamma h_0$  также следует рассматривать как поправку к показанию прибора, обусловленную его расположением.



Фиг. 4-13. Схема дифференциального манометра, у которого  $\gamma_{раб}$  меньше  $\gamma$  измеряемой жидкости.  
а — край для спуска воздуха и зарядки прибора.



Фиг. 4-14. Схема ртутно-чашечного вакуумметра.  
1 — кран для спуска воздуха при регулировке прибора. Может служить и для освобождения присоединительной трубки 2 от жидкости. 3 — вакуумметрическая трубка.

жением. Так же как и давление, высотой столба жидкости выражают и вакуум, вычисляя его по формуле

$$h_v = \frac{p_v}{\gamma} = \frac{p_{атм} - p_{аб}}{\gamma}, \quad (4-23)$$

где  $\gamma$  — объемный вес той жидкости, относительно которой определяется вакуум.

В измерительных приборах вакуум весьма часто измеряют в миллиметрах ртутного столба, иногда в метрах водяного столба. Ртутно-чашечный вакуумметр может быть приспособлен и для измерения избыточного давления, т. е. превращен в мановакуумметр. Для этого необходимо заменить вакуумметрическую трубку 3 другой — соответствующей длины, что и показано на фиг. 4-14 пунктиром.

**Задача 4-1.** Определить абсолютное и избыточное гидростатические давления в водоеме на глубине  $h = 15$  м (фиг. 4-15).

**Решение.** Для решения задачи пользуемся формулой (4-4):

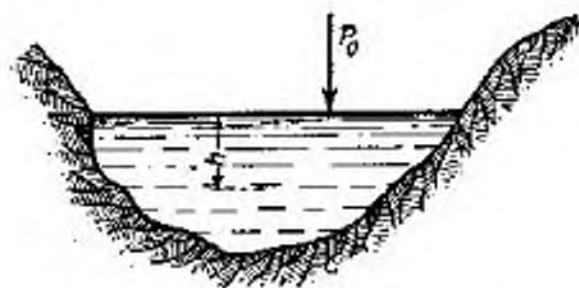


где  $p_0 = 10\,000 \text{ кг/м}^2$  — атмосферное давление на поверхности;  
 $\gamma = 1\,000 \text{ кг/м}^3$  — объемный вес воды;  
 $h = 15 \text{ м}$  — глубина.

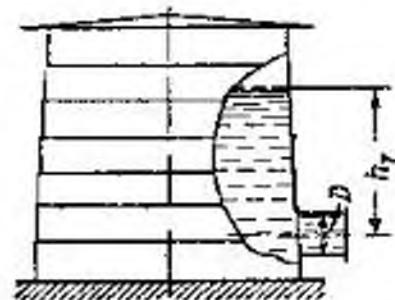
$$p = 10\,000 + 15 \cdot 1\,000 = 25\,000 \text{ кг/м}^2 = 2,5 \text{ кг/см}^2;$$

$$p_u = \gamma \cdot h = 15\,000 \text{ кг/м}^2 = 1,5 \text{ кг/см}^2.$$

**Задача 4-2.** Определить избыточное гидростатическое давление в центре крышки лаза бензорезервуара, приняв давление в газовом пространстве резервуара равным атмосферному давлению, а  $h_r = 8 \text{ м}$  (фиг. 4-16).



Фиг. 4-15. К задаче 4-1.



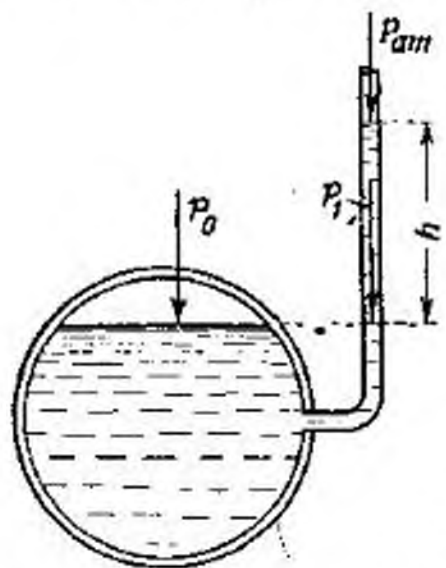
Фиг. 4-16. К задаче 4-2.

**Решение.** Для решения задачи пользуемся формулой (4-6):

$$p_u = \gamma \cdot h_r = 750 \cdot 8 = 6\,000 \text{ кг/м}^2 = 0,6 \text{ кг/см}^2,$$

где  $\gamma = 750 \text{ кг/м}^3$  — объемный вес бензина.

**Задача 4-3.** Определить величину избыточного гидростатического давления на поверхности жидкости в сосуде, находящемся в покое, если в трубке жидкостного манометра (пьезометра) вода поднялась на высоту  $h = 1,5 \text{ м}$ . Свободный конец пьезометра открыт и сообщается с атмосферой (фиг. 4-17).



Фиг. 4-17. Жидкостный манометр. К задаче 4-3.

**Решение.** Так как жидкость в сосуде и манометре находится в равновесии, то во всех точках одной и той же горизонтальной плоскости давление одинаково, т. е.  $p_1 = p_0$ , таким образом:

$$p_u = \gamma h = 1\,000 \cdot 1,5 = 1\,500 \text{ кг/м}^2 = 0,15 \text{ кг/см}^2.$$

В этой задаче, так же как и в последующих, влиянием капиллярности пренебрегаем.

**Задача 4-4.** Определить вакуум в цилиндре *A*, заполненном воздухом, если в трубке жидкостного вакуумметра вода поднялась на высоту  $h = 2 \text{ м}$  (фиг. 4-18).

**Решение.** Для определения вакуума определим сначала гидростатическое давление в цилиндре по формуле (4-5), допуская, что во всем пространстве, заполненном воздухом, имеется одно

и то же гидростатическое давление (такое допущение возможно благодаря малому объемному весу воздуха по сравнению с объемным весом жидкости в вакуумметре):

$$p = p_{atm} - \gamma h,$$

где  $p_{atm}$  — атмосферное давление;

$\gamma$  — объемный вес жидкости в вакуумметре;  
 $h$  — показание вакуумметра.

Вакуум определяется по формуле

$$p_v = p_{atm} - p,$$

т. е.

$$p_v = \gamma \cdot h,$$

или

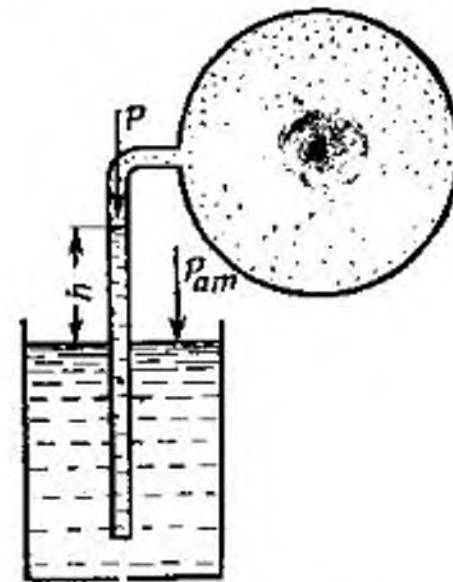
$$p_v = 1\,000 \cdot 2 = 2\,000 \text{ кг/м}^2 = 0,2 \text{ кг/см}^2.$$

Обычно вакуум выражают не величиной давления, а высотой столба жидкости. Для того чтобы выразить вакуум в метрах водяного столба, надо  $p_v$  разделить на  $\gamma$ :

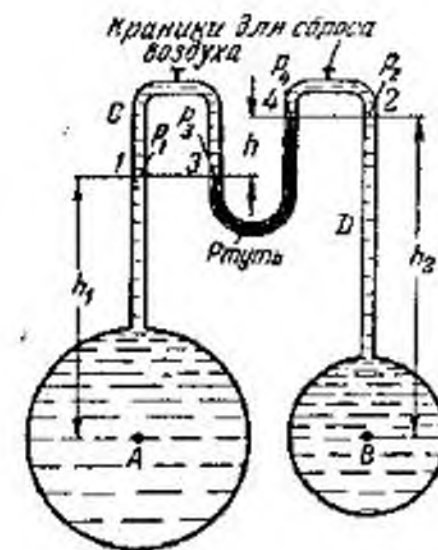
$$h_v [\text{м вод. ст.}] = \frac{p_v}{\gamma} = \frac{2\,000}{1\,000} = 2 \text{ м вод. ст.}$$

Таким образом, вакуум соответствует 2 м вод. ст., причем каждому миллиметру водяного столба вакуумметра соответствует вакуум в  $1 \text{ кг/м}^2$ .

**Задача 4-5.** Требуется определить разность давлений в точках *A* и *B*, находящихся на одном уровне в двух цилиндрах, наполненных водой, если разность уровней ртути в дифференциальном манометре (фиг. 4-19)  $h = 15 \text{ см}$ .



Фиг. 4-18. Схема жидкостного вакуумметра. К задаче 4-4.



Фиг. 4-19. Схема ртутного дифференциального манометра. К задаче 4-5.

До ртути трубки дифференциального манометра *C* и *D* заполнены водой. Температура  $t = 20^\circ \text{C}$ .

**Решение.** Жидкость в дифференциальном манометре находится в равновесии. Поэтому давление в точке 1 равно давлению в точке 3 — как давления в точках однородной жидкости, расположенных в горизонтальной плоскости, т. е.

$$p_1 = p_3.$$

На том же основании

$$p_2 = p_4.$$

В то же время

$$p_A = p_1 + \gamma_w \cdot h_1, \quad p_B = p_2 + \gamma_w \cdot h_2.$$

откуда

$$p_A - p_B = (p_1 - p_2) - \gamma_w \cdot (h_2 - h_1),$$

но

$$p_1 = p_2 + \gamma_r \cdot h.$$



Подставляя значение  $p_1$  в предыдущую формулу, получим:

$$p_A - p_B = h \cdot (\gamma_p - \gamma_0)$$

где  $h = 0,15$  м — показание манометра, а  $\gamma_p$  — объемный вес ртути

$$\gamma_p = \frac{\gamma_0}{1 + 0,0001815t}$$

$\gamma_0 = 13\,600$  кг/м<sup>3</sup> — объемный вес ртути при  $t = 0^\circ$  С;

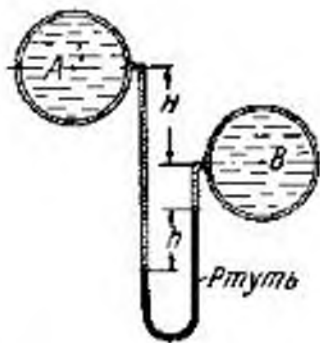
$\gamma_0 = 1\,000$  кг/м<sup>3</sup>;  $t = 20^\circ$  С.

Итак,

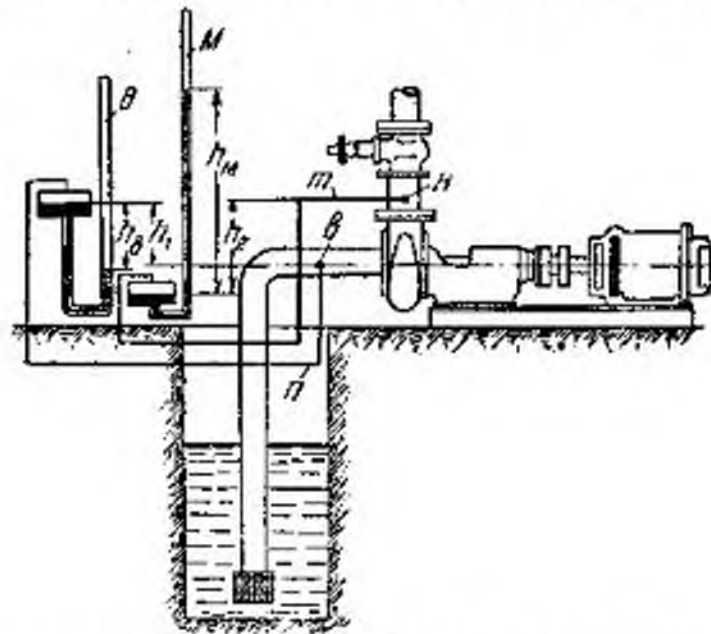
$$p_A - p_B = 0,15 \cdot \left( \frac{13\,600}{1,00363} - 1\,000 \right) = 1\,883 \text{ кг/м}^2 = 0,1883 \text{ кг/см}^2.$$

**Задача 4.6.** Требуется определить (фиг. 4-20) разность давлений в точках, находящихся на оси цилиндров  $A$  и  $B$ , наполненных водой, если разность уровней ртути в дифференциальном манометре  $h = 15$  см. До ртути трубки дифференциального манометра заполнены водой; температура  $t = 20^\circ$  С. Разность уровней осей цилиндров  $H = 1$  м.

Ответ:  $\delta p = 0,0883$  кг/см<sup>2</sup>.



Фиг. 4-20. Схема ртутного дифференциального манометра. К задаче 4-6.



Фиг. 4-21. Схема присоединения манометра и вакуумметра к насосу. М — манометр; В — вакуумметр. К задаче 4-7.

**Задача 4-7.** Требуется определить (фиг. 4-21) абсолютное давление в точке  $v$  (во всасывающей трубке) и в точке  $n$  (в напорной трубке) центробежного насоса, перекачивающего воду с температурой  $t = 20^\circ$  С. К точке  $v$  присоединен ртутно-чашечный вакуумметр  $B$ , а к точке  $n$  — ртутно-чашечный манометр  $M$ . Вакуумметр показывает  $h_v = 0,5$  м рт. ст. Манометр показывает  $h_m = 1,5$  м рт. ст. Высота  $h_1 = 0,5$  м,  $h_2 = 0,2$  м. Трубки  $m$  и  $n$ , соединяющие чашки приборов с точками  $v$  и  $n$ , полностью заполнены также водой.

Барометрическое (атмосферное) давление  $h_0 = 738$  мм рт. ст. Температура  $t = 20^\circ$  С.

Ответ:  $p_v = 0,3725$  кг/м<sup>2</sup>;  $p_n = 2,0526$  кг/см<sup>2</sup>.

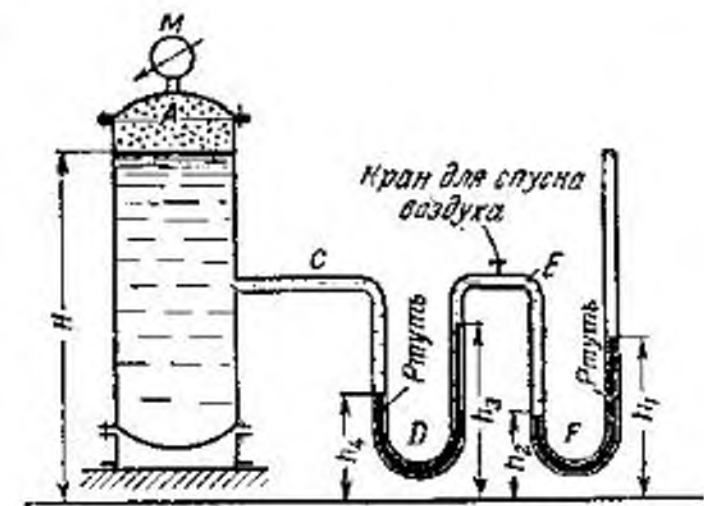
**Задача 4-8.** Цилиндр (фиг. 4-22) и трубки двухжидкостного манометра в частях  $C$  и  $E$  наполнены водой, в частях  $D$  и  $F$  — ртутью. Свободный конец манометра открыт и сообщается с атмосферой. Определить показание манометра  $M$ . В пространстве цилиндра  $A$  находится воздух.

Дано:  $H = 4$  м;  $h_1 = 1,1$  м;  $h_2 = 0,9$  м;  $h_3 = 1,3$  м;  $h_4 = 1$  м;  $\gamma_p = 13\,600$  кг/м<sup>3</sup>;  $\gamma_0 = 1\,000$  кг/м<sup>3</sup>.  
 Ответ:  $p = 0,34$  кг/см<sup>2</sup>.

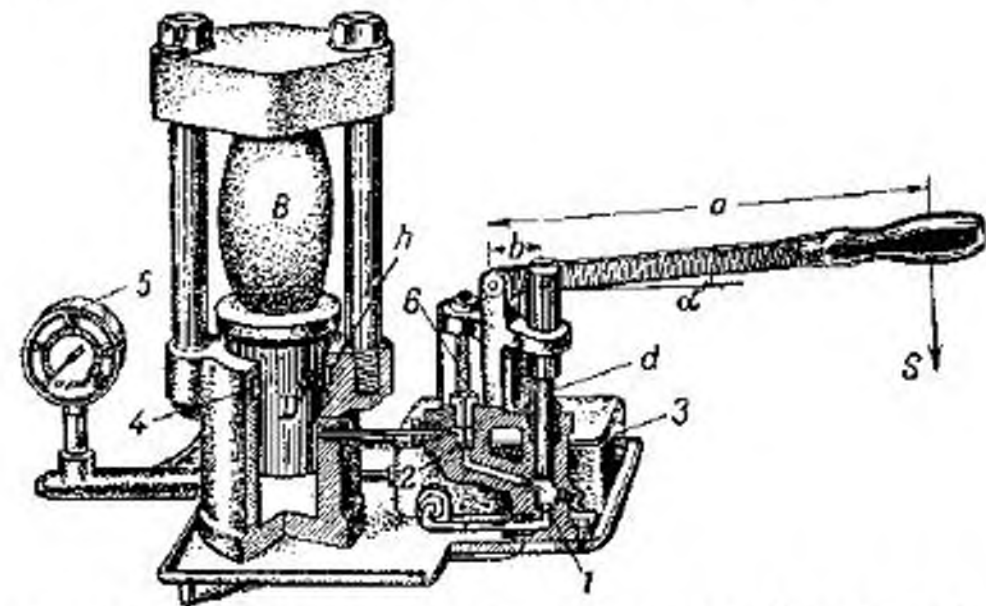
**Задача 4-9.** Гидравлический пресс (фиг. 4-23). Определить силу, с которой гидравлический пресс сжимает груз  $B$ , а также к. п. д. пресса согласно следующим данным:  $a = 30$  см;  $b = 5$  см;  $d = 5$  см;  $D = 25$  см;  $h = 25$  мм — высота кожного манжета;  $f = 0,15$  — коэффициент трения кожи о металл. Вес груза и плунжера  $DG = 100$  кг. Усилие, приложенное к рукоятке,  $S = 15$  кг.

Действие пресса. При ходе малого поршня  $d$  вверх открывается всасывающий клапан  $1$ , при этом рабочая жидкость из резервуара  $3$  всасывается в пространство под малым поршнем. В это время нагнетательный клапан  $2$  закрыт, при обратном ходе малого поршня вниз клапан  $1$  закрывается, а клапан  $2$  открывается.

Гидростатическое давление, создаваемое под малым поршнем, по закону Паскаля передается и на большой поршень  $D$  (плунжер).



Фиг. 4-22. Схема двухжидкостного батарейного манометра. К задаче 4-8.



Фиг. 4-23. Схема гидравлического пресса. К задаче 4-9.

Усилие, создаваемое давлением жидкости на большой поршень, уменьшается вследствие трения между кожным манжетом  $4$  и поршнем. Давление регистрируется манометром  $5$ . Клапан  $6$  — предохранительный.

**Решение.** Сила  $S$ , приложенная к рукоятке малого поршня, передается на поршень с силой (пренебрегаем углом  $\alpha$ )

$$P = \frac{Sa}{b} = \frac{15 \cdot 30}{5} = 90 \text{ кг.}$$

Гидростатическое давление под малым поршнем равно:

$$p = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{360}{\pi 25} = 4,586 \text{ кг/см}^2.$$



Сила, передаваемая на большой поршень,

$$N = p \frac{\pi D^2}{4} = P \frac{D^2}{d^2} = 2\,250 \text{ кг.}$$

Гидростатическое давление передается и на манжет, прижимая последний к поршню с силой

$$F = p h \pi D = 4,586 \cdot 2,5 \pi 25 = 900 \text{ кг.}$$

При этом создается сила трения

$$T = fF = 0,15 \cdot 900 = 135 \text{ кг.}$$

Сила, сжимающая груз,

$$R = N - G - T = 2\,015 \text{ кг.}$$

Коэффициент полезного действия  $\eta$  найдем (пренебрегая трением малого поршня) из соотношения

$$\eta = \frac{R dH}{S a d\varphi} = \frac{R}{N},$$

где  $RdH$  — полезная работа, совершаемая при сжатии груза на  $dH$ ;

$Sad\varphi$  — элементарная работа, совершаемая усилием  $S$ , прикладываемым к рукоятке при повороте ее на угол  $d\varphi$ ;

$$b d\varphi = \frac{D^2}{d^2} dH.$$

Подставляя в  $\eta$  значения  $G$  и  $N$ , получим:

$$\eta = \frac{R}{N} = \frac{N - T - G}{N} = 1 - \frac{T}{N} - \frac{G}{N} = 1 - \frac{4fh}{D} - \frac{G}{S \frac{a}{b} \frac{D^2}{d^2}} = \frac{2\,015}{2\,250} = 0,895.$$

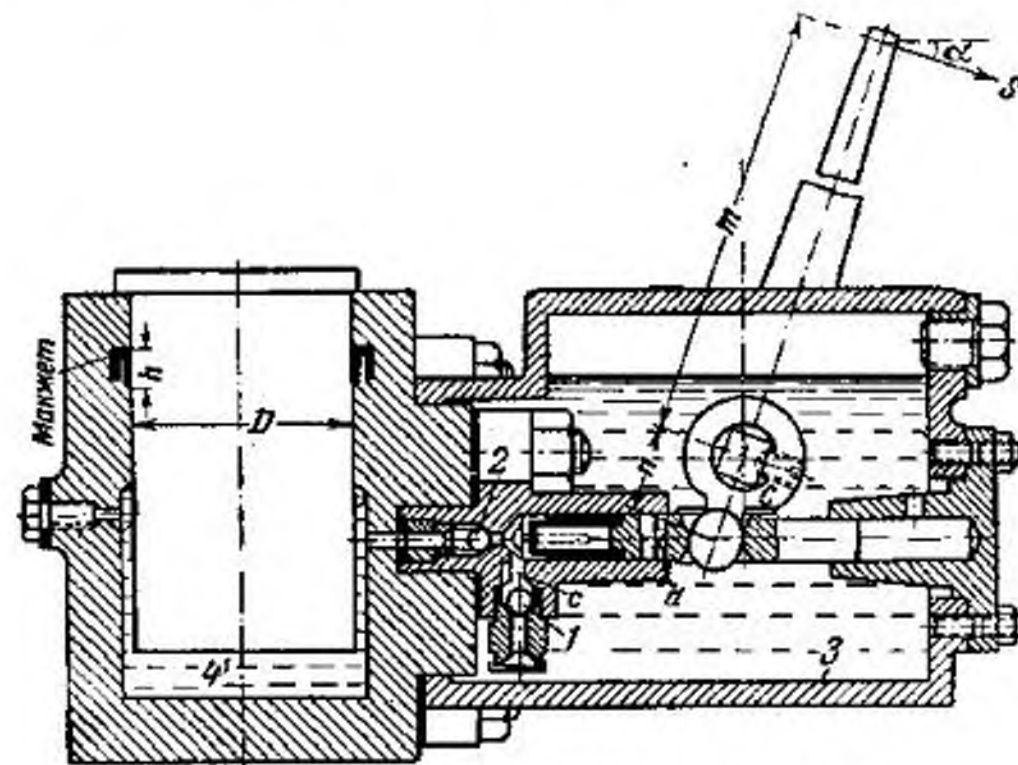
**Задача 4-10.** Гидравлический домкрат. Определить усилие, которое необходимо приложить к рукоятке гидравлического домкрата (фиг. 4-24), а также его к. п. д. для того, чтобы поднять груз весом  $G = 10\,000 \text{ кг}$ .

Размеры рукоятки  $m = 30 \text{ см}$ ,  $n = 2,5 \text{ см}$ . Вес плунжера домкрата  $G_n = 20 \text{ кг}$ . Диаметр плунжера  $D = 12 \text{ см}$ , диаметр поршня  $d = 1,6 \text{ см}$ , высота кожного манжета  $h = 1,5 \text{ см}$ , коэффициент трения  $f = 0,15$ .

Действие гидравлического домкрата осуществляется следующим образом; при ходе малого поршня  $d$  вправо открывается всасывающий клапан 1 и жидкость по каналу  $c$  из головки домкрата 3 всасывается в пространство под малым поршнем. При ходе малого поршня влево клапан 1 закрывается. Создающееся под поршнем давление, открывая нагнетательный клапан 2, передается по закону Паскаля жидкости, находящейся в камере 4 под подъемным плунжером  $D$ . При этом создается усилие, приводящее головку домкрата с находящимся на ней грузом. Чтобы спустить груз, надо открытием крана, не показанного на фигуре, спустить жидкость из камеры 4 в камеру 3.

**Решение.** Сила  $S$ , приложенная к рукоятке домкрата, передается на малый поршень с силой (пренебрегая углом  $\alpha$ ):

$$P = S \frac{m}{n}.$$



Фиг. 4-24. Гидравлический домкрат. К задаче 4-10.

Под малым поршнем создается гидростатическое давление

$$p = \frac{4P}{\pi d^2}.$$

Сила, передаваемая на большой поршень,

$$N = p \frac{\pi D^2}{4} = P \frac{D^2}{d^2} = S \frac{m}{n} \cdot \frac{D^2}{d^2}.$$

Гидростатическое давление передается кожному манжету, который прижимается к большому поршню, создавая силу трения:

$$T = f p \pi D h = \frac{4fh}{D} S \frac{m}{n} \frac{D^2}{d^2}.$$

Сила, передающаяся поднимаемому грузу, должна быть больше  $G$ .

$$G < N - T - G_n = S \frac{m}{n} \frac{D^2}{d^2} \left( 1 - \frac{4fh}{D} \right) - G_n.$$

Из последнего выражения найдем:

$$S > \frac{G + G_n}{\frac{m}{n} \frac{D^2}{d^2} \left( 1 - \frac{4fh}{D} \right)} = \frac{10\,000 + 20}{2,5 \left( \frac{12}{1,6} \right)^2 \left( 1 - \frac{4 \cdot 0,15 \cdot 1,5}{12} \right)} = 16,05 \text{ кг.}$$

Коэффициент полезного действия  $\eta$  найдем, пренебрегая трением малого поршня, из соотношения

$$\eta = \frac{G dH}{S m d\varphi} = \frac{G}{N},$$

где  $GdH$  — полезная работа, совершаемая для подъема груза на высоту  $dH$ .



$Snd\varphi$  — элементарная работа, совершаемая усилием  $S$ , прикладываемым к рукоятке при повороте ее на угол  $d\varphi$ , а  $nd\varphi = \frac{D^2}{d^2} dH$ . Подставляя в  $\eta$  значения  $G$  и  $N$ , получим:

$$\eta = 1 - \frac{4fh}{D} - \frac{G_n}{S \frac{\pi D^2}{4}} = 1 - \frac{4 \cdot 0,15 \cdot 1,5}{12} - \frac{20}{16,06 \frac{30}{2,5} \left(\frac{12}{1,6}\right)^2} = 0,923,$$

т.е. 92,3%.

**Задача 4-11.** Гидравлический грузовой аккумулятор. В гидропрессовых установках широкое распространение получил гидравлический грузовой аккумулятор, одна из конструкций которого изображена на фиг. 4-25.

Вода из насоса высокого давления через трубу 1 подается в цилиндр 2, в котором может перемещаться плунжер 3. К головке плунжера посредством болтовых тяг 4 подвешены грузы 5, свободно перемещающиеся вместе с плунжером 3 в цилиндрической баине 6, устанавливаемой на прочном фундаменте. Перемещение плунжера начнется тогда, когда давление на него, оказываемое жидкостью, будет больше веса движущихся частей аккумулятора и сил трения. Гидростатическое давление, создаваемое грузовым аккумулятором, если пренебречь ускорением движущихся масс, определяется весом подвижных частей аккумулятора и площадью поперечного сечения плунжера.

В гидропрессовых установках аккумуляторы являются потребителями энергии в моменты, когда прессы работают недостаточно интенсивно, и, наоборот, являются источниками энергии в моменты, когда производительность насосов, питающих прессы установки, недостаточна, чтобы удовлетворить требуемую погрешность в воде.

Обязательной аппаратурой при всяком грузовом аккумуляторе является предельный ограничитель его верхнего положения в виде предохранительного клапана, открываемого тягой 7 при подъеме аккумулятора в крайнее верхнее положение, а также дроссельный клапан для уменьшения скорости падения грузов аккумулятора в момент его разрядки. Дроссельный клапан действует при нажиме дна аккумулятора на рычаг 8.

Обязательной аппаратурой при всяком грузовом аккумуляторе является предельный ограничитель его верхнего положения в виде предохранительного клапана, открываемого тягой 7 при подъеме аккумулятора в крайнее верхнее положение, а также дроссельный клапан для уменьшения скорости падения грузов аккумулятора в момент его разрядки. Дроссельный клапан действует при нажиме дна аккумулятора на рычаг 8.

Фиг. 4-25. Гидравлический аккумулятор. К задаче 4-11.

Определить давление, создаваемое гидравлическим грузовым аккумулятором, изображенным на фиг. 4-25, и запасаемую им энергию согласно следующим данным: вес движущихся частей  $G = 70\,000$  кг, диаметр плунжера  $d = 20$  см; площадь поперечного сечения плунжера  $\omega = 314$  см<sup>2</sup>; ход плунжера  $H = 7$  м; ширина кожного манжета уплотнения  $h = 25$  мм, коэффициент трения кожи о металл  $f = 0,15$ .

**Решение.** Давление, создаваемое в цилиндре аккумулятора под плунжером, определится из выражения

$$p\omega = G \pm \tau dhfp,$$

где знак «+» относится к подъему грузов, а «-» к опусканию:

$$p = \frac{G}{\omega \pm \pi dhf}.$$

В последнем выражении «+» относится к опусканию груза. Энергия, запасаемая аккумулятором (пренебрегаем энергией положения), определяется энергией давления и будет равна удельной энергии давления  $\frac{p}{\gamma}$ , умноженной на вес жидкости в объеме цилиндра аккумулятора  $\gamma \frac{\pi d^2}{4} H$  [кг]. Таким образом:

$$W = p \frac{\pi d^2}{4} H \text{ [кг·м]}.$$

Подставляя значения, получаем (для спуска):

$$p = \frac{70\,000}{314 + 3,14 \cdot 20 \cdot 2,5 \cdot 0,15} = 207,3 \text{ кг/см}^2;$$

$$W = 207,3 \cdot 314 \cdot 7 = 455\,645 \text{ кг·м} = 4\,469\,877 \text{ дж}.$$

Если принять продолжительность разряда аккумулятора в 120 сек., то развиваемая им в среднем мощность определяется по формуле

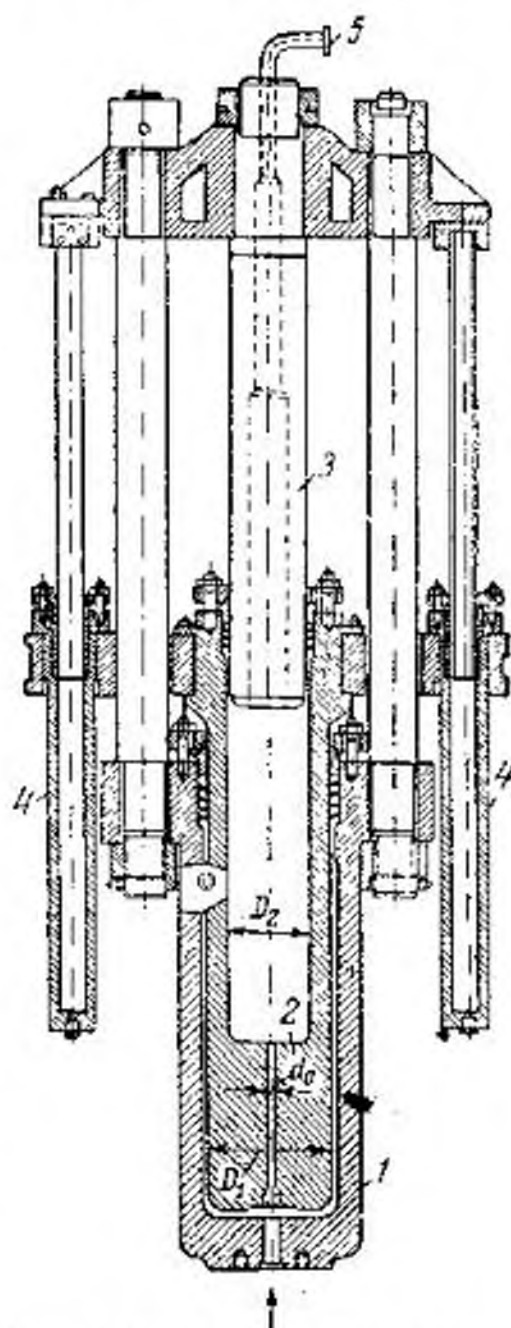
$$N = \frac{W}{120} = 37\,249 \text{ ат}.$$

**Задача 4-12.** Гидравлический мультипликатор. Определить давление, создаваемое гидравлическим мультипликатором, согласно следующим данным: вес подвижных частей мультипликатора  $G = 400$  кг;  $D_1 = 25$  см;  $D_2 = 15$  см;  $d_0 = 2,5$  см. Размеры кожаных манжетов:  $h_1 = 20$  мм;  $h_2 = 20$  мм.

Давление, создаваемое аккумулятором,  $p_{ак} = 200$  кг/см<sup>2</sup>.

Гидравлический мультипликатор устанавливается в гидропрессовых установках обычно в тех случаях, когда давление, создаваемое аккумулятором, бывает недостаточным. Конструкция гидравлического мультипликатора (фиг. 4-26) в основном состоит из неподвижного цилиндра 1, в котором находится подвижный плунжер 2. Подвижный плунжер одновременно служит также и цилиндром, внутри которого находится неподвижный плунжер 3. Подвижный плунжер — цилиндр 2 — соединен жестко с подвижной поперечной, которая несет на себе вспомогательные подвижные цилиндры 4. Жидкость под давлением, создаваемым аккумулятором (порядка 200 кг/см<sup>2</sup>), попадает в неподвижный цилиндр 1 и заставляет подниматься вверх подвижный цилиндр 2. Жидкость также заполняет и полость цилиндра 2, откуда она вытесняется к прессу по трубопроводу 5 под увеличивающимся давлением. В описанном мультипликаторе уплотнение цилиндров выполнено в виде так называемых сальников.

**Решение.** Пренебрегая ускорением движущихся частей, определим давление, создаваемое мультипликатором в цилиндре 2; рассмотрим равновесие сил, действующих на цилиндр 2, спроектировав их на вертикаль.



Фиг. 4-26. Гидравлический мультипликатор. К задаче 4-12.



Снизу вверх действует давление жидкости, находящейся под аккумуляторным давлением  $p_{ак}$  в полости цилиндра 1:

$$P_1 = p_{ак} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (D_1^2 - d_0^2).$$

Сверху вниз действуют вес подвижных частей  $G$ , сила трения цилиндров 1 и 2 в уплотнениях  $T_1 = fh_1\pi D_1 p_{ак}$ , сила трения в уплотнении цилиндра 2 с плунжером 3  $T_2 = fh_2\pi D_2 p_{мул}$  и сила мультипликаторного давления жидкости в полости цилиндра 2, равная:

$$P_2 = p_{мул} \frac{\pi}{4} (D_2^2 - d_0^2).$$

Трением в уплотнениях вспомогательных цилиндров 4 можно при ходе вверх пренебречь ввиду того, что в этот момент цилиндры не работают. Их назначение — приводить систему в начальное положение.

Итак, будем иметь:

$$P_1 - G - T_1 - T_2 - P_2 = 0,$$

или, подставляя значения

$$p_{ак} \frac{\pi}{4} (D_1^2 - d_0^2) - fh_1\pi D_1 p_{ак} - fh_2\pi D_2 p_{мул} - p_{мул} \frac{\pi}{4} (D_2^2 - d_0^2) - G = 0,$$

откуда

$$p_{мул} = p_{ак} \frac{-4fh_1D_1 + D_1^2 - d_0^2 - \frac{4G}{\pi p_{ак}}}{4fh_2D_2 + D_2^2 - d_0^2}.$$

Подставляя значения, найдем:

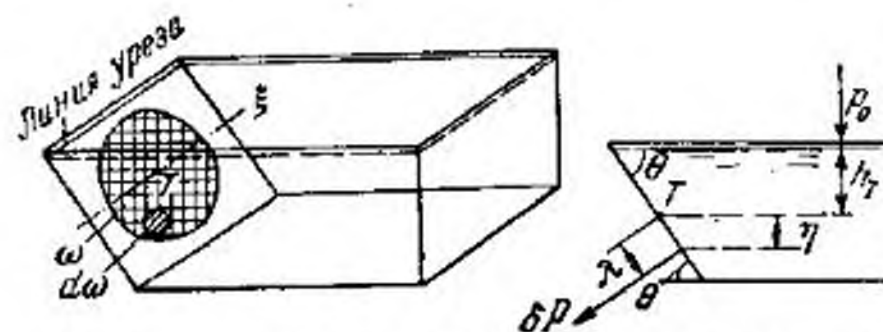
$$p_{мул} = 200 \frac{-4 \cdot 0,15 \cdot 2,0 \cdot 25 + 625 - 6,25 - \frac{4 \cdot 400}{\pi \cdot 200}}{4 \cdot 0,15 \cdot 2 \cdot 15 + 225 - 6,25} = 495,2 \text{ кг/см}^2.$$

#### 4-8. Статическое давление жидкости на плоскую поверхность. Гидростатический парадокс

Для определения силы  $P$  давления жидкости на плоскую поверхность (на фиг. 4-27 заштрихована), площадь которой равняется  $\omega$ , разобьем ее произвольным образом на бесконечно малые площадки  $d\omega$ . Давление жидкости на поверхность определим как сумму сил давлений на отдельные элементарные площадки  $d\omega$ .

Рассмотрим какую-либо элементарную площадку, центр которой расположен на глубине  $\eta$ , от уровня, проходящего через центр тяжести всей площади  $T$ . Давление в центре тяжести этой площади обозначим через  $p_T$ . Тогда гидростатическое давление в центре элементарной площадки будет равно:

$$p = p_T + \gamma\eta,$$



Фиг. 4-27. Координаты  $\eta$  положительны при отсчете вниз, и отрицательны при отсчете вверх от точки  $T$ .

где  $\eta$  для частиц, расположенных выше центра тяжести, имеет отрицательное значение. Сила давления на элементарную площадку будет равна:

$$dP = p d\omega = (p_T + \gamma\eta) d\omega.$$

Силу давления на всю стенку определим, взяв интеграл по всей смоченной площади:

$$P = \int_{\omega} (p_T + \gamma\eta) d\omega. \quad (4-24)$$

Разобьем этот интеграл на сумму двух интегралов, тогда получим:

$$P = p_T \int_{\omega} d\omega + \gamma \int_{\omega} \eta d\omega.$$

Первый интеграл

$$\int_{\omega} d\omega = \omega.$$

Второй интеграл можно представить в виде:

$$\sin \theta \int_{\omega} \lambda d\omega,$$

где  $\lambda$  — расстояние элементарной площадки от оси  $\xi$ , расположенной в плоскости стенки, проходящей через ее центр тяжести и параллельной линии уреза жидкости; но  $\int_{\omega} \lambda d\omega$  — статический момент площади  $\omega$  относительно оси  $\xi$ . Такой статический момент равен нулю:

$$\int_{\omega} \lambda d\omega = 0, \quad (4-25)$$

поэтому

$$P = p_T \omega. \quad (4-26)$$

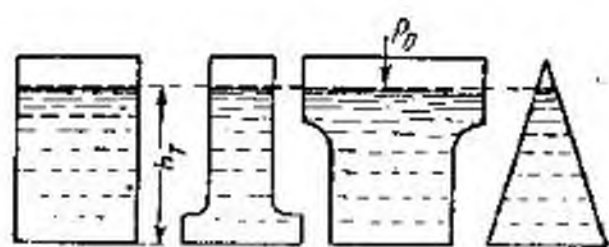


Таким образом, сила давления жидкости на плоскую поверхность равна произведению площади этой поверхности на величину гидростатического давления в ее центре тяжести. Если давление на свободной поверхности равно  $p_0$ , а глубина погружения центра тяжести равна  $h_T$ , то

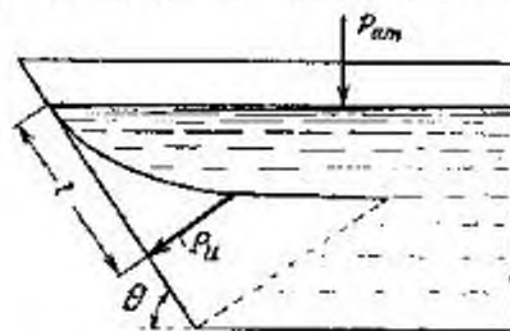
$$p_T = p_0 + \gamma h_T. \quad (4-27)$$

Формулой (4-26) можно воспользоваться и для определения силы давления на плоские днища резервуаров и т. п. В этом случае  $h_T$  есть глубина центра тяжести смоченной поверхности дна.

Как следствие этой формулы получаем доказательство известного гидростатического парадокса, согласно которому вели-



Фиг. 4-28. Гидростатический парадокс. Независимо от формы сосуда силы давления одной и той же жидкости на равновеликие днища одинаковы.



Фиг. 4-29. Графическое изображение зависимости избыточной силы давления  $P_u$  на плоскую прямоугольную стенку от глубины.

чина силы давления жидкости на дно резервуара не зависит от формы резервуара и количества жидкости в нем. Действительно, сила давления на равновеликие днища резервуаров различной формы (фиг. 4-28) при одних и тех же значениях  $p_0$ ,  $\gamma$  и  $h_T$  согласно формулам (4-26) и (4-27) будет иметь одно и то же значение

$$P = (p_0 + \gamma h_T) \omega \quad (4-28)$$

для всех форм резервуаров.

Если давление на свободной поверхности равно атмосферному  $p_0 = p_{atm}$  и определяется величина избыточного давления, расчетной формулой будет:

$$P_u = p_{Tu} \omega = \gamma h_T \omega. \quad (4-29)$$

В этом случае для прямоугольной стенки (фиг. 4-29) ширины  $b$  сила давления на участок стенки длиной  $l$

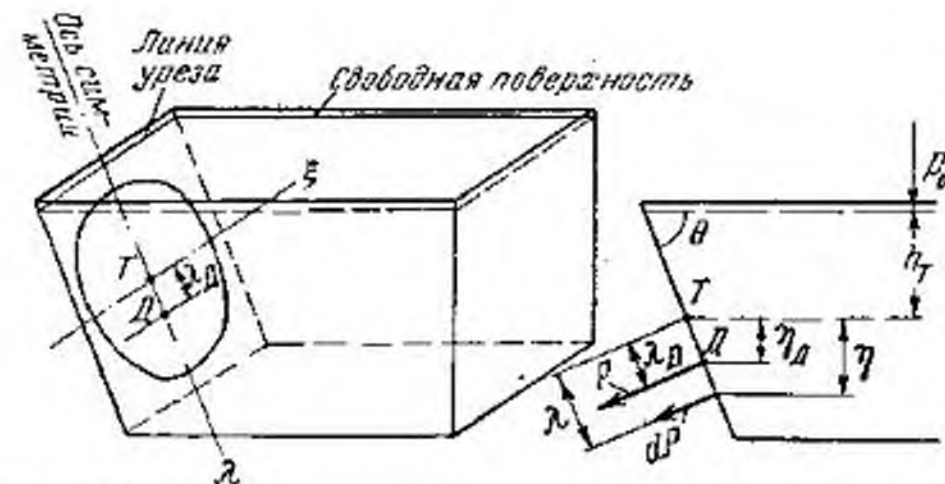
$$P_u = \gamma \sin \Theta \frac{bl^2}{2}, \quad (4-30)$$

т. е. сила давления возрастает по квадратичной параболе относительно  $l$ .

#### 4-9. Центр статического давления жидкости на плоскую поверхность

Центром давления называется точка приложения равнодействующей сил давления на некоторую поверхность.

Сначала рассмотрим плоскую поверхность, имеющую ось симметрии, расположенную в плоскости поверхности, перпендикулярно к линии уреза жидкости. В простейшем случае этому условию удовлетворяют поверхности прямоугольная, круглая и т. п.



Фиг. 4-30. Центр статического давления  $D$  всегда расположен ниже центра тяжести  $T$ .

Центр тяжести  $T$  смоченной площади этой поверхности расположен на оси симметрии (фиг. 4-30). Для таких поверхностей центр давления  $D$  также будет расположен на оси симметрии ниже центра тяжести на расстоянии  $\lambda_D$ . Для определения расстояния  $\lambda_D$  вычислим момент равнодействующей силы  $P$  относительно оси  $\xi$ , расположенной в плоскости поверхности и проходящей через центр тяжести смоченной площади, параллельно линии уреза. При этом получим:

$$P \lambda_D = \int_{\omega} dP \lambda.$$

Подставляя вместо  $P$  и  $dP$  их значения, будем иметь:

$$p_T \omega \lambda_D = \int_{\omega} (p_T + \gamma \eta) d\omega \lambda,$$

вводя вместо

$$\eta = \lambda \sin \Theta$$

и имея в виду, что

$$\int_{\omega} \lambda d\omega = 0,$$



получим:

$$p_T \omega \cdot \lambda_D = \gamma \sin \Theta \int \lambda^2 d\omega.$$

Заменяя

$$\int \lambda^2 d\omega = J_T,$$

где  $J_T$  — момент инерции смоченной площади относительно оси  $\xi$ , найдем:

$$\lambda_D = \frac{\gamma \sin \Theta J_T}{p_T \omega}. \quad (4-31)$$

Отсюда следует, что центр давления расположен всегда ниже центра тяжести поверхности.

В том случае, если на свободной поверхности давление равно атмосферному давлению,

$$p_{Tu} = \gamma h_T;$$

для координаты центра избыточного давления получим:

$$\lambda_{Du} = \frac{J_T \sin \Theta}{h_T \omega}. \quad (4-32)$$

Если плоская стенка ограничена произвольным контуром, для которой ось  $\lambda$ , проходящая через центр тяжести перпендикулярно линии уреза свободной поверхности, уже не является осью симметрии, кроме координаты  $\lambda_D$ , необходимо найти вторую координату  $\xi_D$ , для чего следует вычислить момент равнодействующей силы  $P$ , но уже относительно оси  $\lambda$ . При этом получим:

$$p_T \omega \xi_D = \int (p_T + \gamma \xi) \cdot \xi \cdot d\omega,$$

или

$$p_T \omega \xi_D = \gamma \sin \Theta \int \lambda \xi d\omega,$$

откуда

$$\xi_D = \frac{\gamma \sin \Theta \cdot J_{\xi\lambda}}{p_T \cdot \omega}. \quad (4-33)$$

где  $J_{\xi\lambda}$  — центробежный момент инерции площади относительно осей  $\xi$  и  $\lambda$ .

Следует отметить, что для плоской стенки, имеющей ось симметрии, принимаемую за ось  $\lambda$  (фиг. 4-30), центробежный момент  $J_{\xi\lambda} = 0$ . Поэтому  $\xi_D = 0$ , т. е. центр давления лежит на оси симметрии, как и было предположено в первой части доказательства.

Для некоторых, часто встречающихся в практике случаев расчетные формулы для определения глубины погружения центра избыточного давления  $h_D$  приведены в табл. 4-2.

Таблица 4-2

Форма стенки	Свободный уровень жидкости						
	Фиг. 4-31	Фиг. 4-32	Фиг. 4-33	Фиг. 4-34	Фиг. 4-35	Фиг. 4-36	Фиг. 4-37
$h_D$	$\frac{h}{2} \cdot \frac{3b+B}{2b+B}$	$\frac{2}{3} \cdot h$	$\frac{h}{3} \cdot \frac{3h_0+2h}{2h_0+h}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2} \cdot \frac{2h_0+h}{3h_0+h}$	$h_0 + \frac{5d}{2} \cdot \frac{d}{d+d}$	$0,294 \cdot d$

**Задача 4-13.** Определить силу избыточного давления бензина на крышку лаза бензорезервуара (см. также фиг. 4-16) согласно данным задачи 4-2, приняв  $D = 0,4$  м.

**Решение.** Сила избыточного давления определится согласно формуле (4-29)

$$P = \gamma h_T \omega = 750 \cdot 8 \cdot 0,1256 = 753,6 \text{ кг},$$

где

$$\omega = 0,785 \cdot D^2 = 0,785 \cdot 0,16 = 0,1256 \text{ м}^2.$$

Центр давления находится от свободной поверхности на расстоянии

$$h_D = h_T + \frac{J_T}{\omega \cdot h_T} = 8 + \frac{0,001256}{0,1256 \cdot 8} = 8,00125 \text{ м},$$

где

$$J_T = \frac{\pi \cdot D^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 0,4^4}{64} = 0,001256 \text{ м}^4.$$

#### 4-10. Статическое давление жидкости на криволинейные поверхности

На каждую из элементарных площадок криволинейной поверхности действует элементарная сила, направленная по нормали к элементарной площадке и равная  $dP$ . В общем случае элементарные силы образуют систему сил, произвольно расположенных в пространстве. Такая система сил в общем случае приводится к одной силе

$$P = \int \overline{dP}, \quad (4-34)$$



называемой главным вектором, который равен векторному интегралу от элементарных сил, и к одной паре, момент которой  $M$  называется главным моментом сил давления:

$$\bar{M} = \int_{\omega} \bar{r} d\bar{P}. \quad (4-35)$$

В последней формуле под интегралом стоит векторное произведение радиуса-вектора  $\bar{r}$  центра элементарной площадки относительно центра моментов на вектор  $d\bar{P}$ .

В частных случаях может оказаться, что силы давления приводятся только к одной силе, называемой равнодействующей силой, что должно быть хорошо известно из курса теоретической механики.

В качестве примера, когда давления приводятся к одной силе, можно указать на шаровую поверхность. В этом случае равнодействующая сила давлений должна пройти через центр шара.

Можно также показать, что давление покоящейся жидкости на любое тело, полностью погруженное в нее (и находящееся в покое), также приводится только к одной равнодействующей.

В дальнейшем определим лишь величину главного вектора сил давления, который будем называть просто вектором давления.

В общем случае направление вектора давления может быть любым в пространстве и поэтому для определения  $\bar{P}$  по величине и направлению достаточно вычислить его проекции на три взаимно перпендикулярные направления, например на три оси координат. В этом случае величина вектора давления определится по формуле

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}, \quad (4-36)$$

а направление — косинусами направляющих углов, т. е. углов, образуемых направлением вектора давления с осями координат:

$$\cos(P, x) = \frac{P_x}{P}; \quad \cos(P, y) = \frac{P_y}{P}; \quad \cos(P, z) = \frac{P_z}{P}. \quad (4-37)$$

Рассмотрим определение проекции вектора давления на горизонтальную ось. Для этого разобьем (фиг. 4-38) рассматриваемую криволинейную поверхность (на фигуре заштрихована) на элементарные площадки  $d\omega$ , на каждую из которых действует элементарная сила  $dP$ . Выберем в жидкости произвольный уровень, давление на котором  $p_0$  известно и который может быть расположен как выше, так и ниже площадки. Обозначим глубину центра этой площадки относительно уровня с известным давле-

нием через  $h$ . Сила давления на эту элементарную площадку может быть вычислена по формуле

$$dP = (p_0 + \gamma h) d\omega. \quad (4-38)$$

Пусть эта элементарная сила образует с горизонтальной осью проекций угол  $\theta$ . Проекция этой силы будет равна:

$$dP_{гор} = (p_0 + \gamma h) d\omega \cos \theta. \quad (4-39)$$

Произведение  $d\omega \cos \theta$  можно рассматривать как проекцию элементарной площадки на плоскость, перпендикулярную к оси проекций, т. е. на вертикальную плоскость. Обозначим ее через  $d\omega_{верт}$ . Таким образом,

$$dP_{гор} = (p_0 + \gamma h) d\omega_{верт}. \quad (4-40)$$

Проекция вектора давления будет равна алгебраической сумме проекций элементарных сил, т. е. интегралу

$$P_{гор} = \int_{\omega} dP_{гор} = \int_{\omega} (p_0 + \gamma h) d\omega_{верт}.$$

Разобьем этот интеграл на два:

$$p_0 \int_{\omega} d\omega_{верт} \quad \text{и} \quad \gamma \int_{\omega} h d\omega_{верт}.$$

Первый интеграл равен:

$$\int_{\omega} d\omega_{верт} = \omega_{верт}.$$

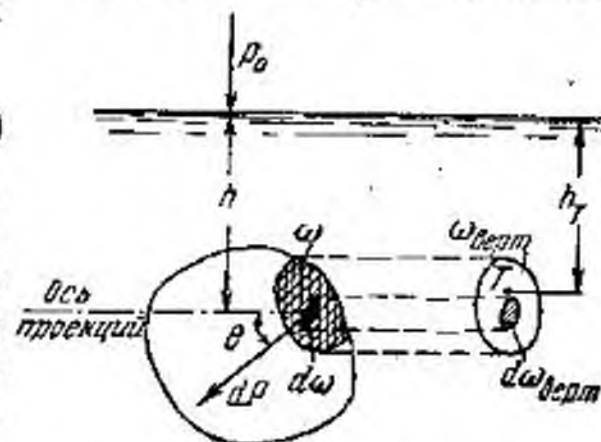
Второй интеграл равен статическому моменту площади вертикальной проекции криволинейной поверхности относительно оси, расположенной в плоскости уровня с известным давлением:

$$\int_{\omega} h d\omega_{верт} = h_T \omega_{верт},$$

где  $h_T$  — глубина центра тяжести вертикальной проекции криволинейной поверхности относительно уровня с известным давлением.

Таким образом, проекция вектора давления на горизонтальную ось будет равна:

$$P_{гор} = (p_0 + \gamma h_T) \omega_{верт}. \quad (4-41)$$

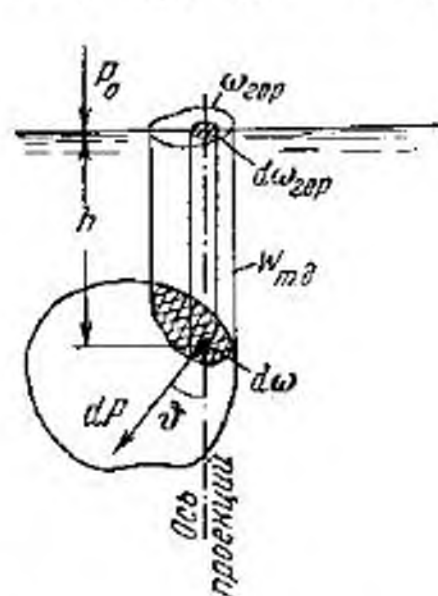


Фиг. 4-38. К определению горизонтальной проекции силы давления на криволинейную поверхность.

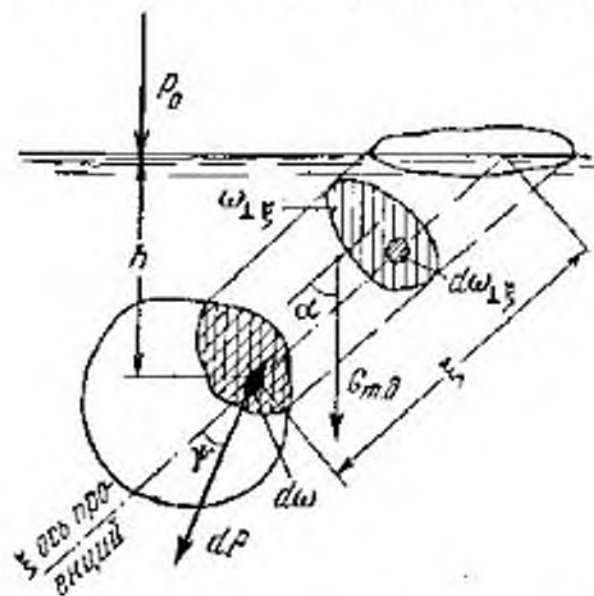


Итак, чтобы найти горизонтальную проекцию вектора давления, надо найти силу давления на проекцию криволинейной поверхности на вертикальную плоскость, перпендикулярную к оси проекций.

Для того чтобы определить вертикальную проекцию вектора давления, надо (фиг. 4-39) поступить аналогично предыдущему:



Фиг. 4-39. К определению вертикальной проекции силы давления на криволинейную поверхность.



Фиг. 4-40. К определению проекций силы давления на криволинейную поверхность.

разбить криволинейную поверхность на элементарные площадки, найти элементарные силы, но спроектировать их уже на вертикальную ось проекции. Обозначим через  $\vartheta$  угол, который образует элементарная сила  $dP$ , но теперь уже с вертикальной осью проекций. Тогда для проекции вектора давления на вертикальную ось получим выражение, аналогичное (4-39), а именно:

$$dP_{\text{верт}} = (p_0 + \gamma h) d\omega \cos \vartheta.$$

Произведение  $d\omega \cos \vartheta$  равно проекции элементарной площадки на горизонтальную плоскость. Поэтому предыдущее выражение может быть записано в виде:

$$dP_{\text{верт}} = (p_0 + \gamma h) d\omega_{\text{гор}}, \quad (4-42)$$

откуда

$$P_{\text{верт}} = \int_{\omega} (p_0 + \gamma h) d\omega_{\text{гор}}.$$

Первый интеграл равен:

$$p_0 \int_{\omega} d\omega_{\text{гор}} = p_0 \omega_{\text{гор}}.$$

Второй интеграл имеет простой геометрический смысл, а именно  $\int_{\omega} h d\omega_{\text{гор}}$  равен цилиндрическому объему, основанием которого служит криволинейная поверхность. С противоположной стороны этот объем ограничен уровнем, на котором известно давление  $p_0$ . Назовем этот объем объемом тела давления  $W_{\text{т.д}}$ .

Таким образом,

$$P_{\text{верт}} = p_0 \omega_{\text{гор}} + \gamma W_{\text{т.д}}. \quad (4-43)$$

Легко показать, что если бы уровень с известным давлением был расположен ниже криволинейной площадки, то расчетная формула получилась бы в виде:

$$P_{\text{верт}} = p_0 \omega_{\text{гор}} - \gamma W_{\text{т.д}}. \quad (4-44)$$

Для определения проекции главного вектора на произвольное направление (фиг. 4-40) поступаем аналогично предыдущему случаю.

Для произвольного направления  $\xi$  будем иметь:

$$P_{\xi} = \int_{\omega} (p_0 + \gamma h) d\omega \cos \phi$$

или

$$P_{\xi} = \int_{\omega} (p_0 + \gamma h) d\omega_{\perp \xi}, \quad (4-45)$$

где  $d\omega_{\perp \xi}$  — проекция криволинейной площадки на плоскость, перпендикулярную к оси  $\xi$ .

Вместо  $h$  введем в рассмотрение величину  $\xi$  — расстояние от центра элементарной площадки до уровня с известным давлением (расстояние измеряется параллельно оси проекций). Обозначим через  $\alpha$  угол, образуемый осью  $\xi$  с вертикалью, тогда

$$h = \xi \cos \alpha,$$

при этом

$$P_{\xi} = \int_{\omega} (p_0 + \gamma \xi \cos \alpha) d\omega_{\perp \xi},$$

или

$$P_{\xi} = p_0 \int_{\omega} d\omega_{\perp \xi} + \gamma \cos \alpha \int_{\omega} \xi d\omega_{\perp \xi}.$$

Первый интеграл равен:

$$\int_{\omega} d\omega_{\perp \xi} = \omega_{\perp \xi},$$

где  $\omega_{\perp \xi}$  — проекция криволинейной площадки на плоскость, перпендикулярную к оси  $\xi$ .

Второй интеграл  $\int_{\omega} \xi d\omega_{\perp \xi}$  равен объему цилиндрического тела, параллельного оси проекции и ограниченного с одной стороны криволинейной поверхностью, а с другой — плоскостью уровня с известным давлением.



Назовем этот объем объемом тела давления и обозначим его через  $W_{m, \partial}$ .

Таким образом,

$$P_{\xi} = p_0 \omega_{\perp \xi} + \gamma W_{m, \partial} \cos \alpha, \quad (4.46)$$

где  $\gamma W_{m, \partial} = G_{m, \partial}$  можно рассматривать как вес жидкости в объеме тела давления.

В этой формуле за угол  $\alpha$  всегда можно принимать острый угол, а знак выражения  $\gamma W_{m, \partial} \cos \alpha$  принимать в зависимости от того, где расположен уровень с известным давлением.

Если он будет выбран ниже криволинейной поверхности, то формула для  $P_{\xi}$  должна быть представлена в виде:

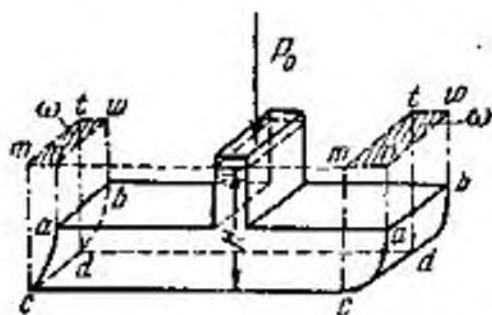
$$P_{\xi} = p_0 \omega_{\perp \xi} - \gamma W_{m, \partial} \cos \alpha. \quad (4.47)$$

Из этих формул получаются формулы (4.43) и (4.44), как частный случай ( $\alpha = 0$ ). Для горизонтальной проекции ( $\alpha = 90^\circ$ ) второй член этой формулы обращается в неопределенность  $\sim 0$ .

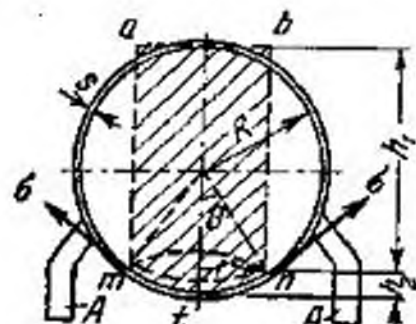
Таким образом, чтобы найти проекции вектора давления на произвольную (но не горизонтальную) ось, предварительно необходимо:

- найти уровень с известным давлением;
- найти  $\omega_{\perp \xi}$  — проекцию криволинейной поверхности на плоскость, перпендикулярную к оси проекции;
- построить тело давления и вычислить его вес  $G_{m, \partial}$ .

На фиг. 4-41 изображены тела давления, определяющие вертикальные составляющие вектора давления жидкости на цилиндрические поверхности  $abcd$ . Как видим, в обоих случаях объемы



Фиг. 4-41. Вертикальная составляющая давления только жидкости на криволинейную поверхность  $abcd$  слева направлена вверх, справа — вниз и в обоих случаях равна весу жидкости в объеме  $abcdm n t w$ .



Фиг. 4-42. Разрез сферического резервуара. К задаче 4-14.

тела давления ограничены криволинейными поверхностями, четырьмя вертикальными плоскостями и горизонтальной плоскостью, совпадающей с уровнем жидкости, давление на котором  $p_0$  предполагается известным. На поверхность слева сила давления направлена вверх, на поверхность справа — вниз. В обоих случаях сила давления вычисляется по одной и той же формуле

$$P_{\text{верт}} = p_0 \omega + \gamma W_{m, \partial},$$

где  $\gamma W_{m, \partial}$  — вес жидкости в объеме  $abcdm n t w$ ;

$\omega$  — заштрихованные проекции криволинейных поверхностей  $m n t w$ .

**Задача 4-14.** Определить напряжение  $\sigma$ , возникающее в сечении сферического резервуара (фиг. 4-42), на уровне ниже опор ( $\theta = 35^\circ$ ). Резервуар почти полностью наполнен бензином объемного веса  $\gamma = 715 \text{ кг/м}^3$ . Диаметр резервуара  $D = 10,5 \text{ м}$ . Давление в газовом пространстве (незаполненная жидкостью верхняя часть резервуара) принимаем равным атмосферному. Толщина стенки  $S = 10 \text{ мм}$ .

**Решение.** Для вычисления напряжения  $\sigma$  разрежем резервуар конической поверхностью на уровне, определяемом углом  $\theta = 35^\circ$ , и рассмотрим равновесие нижней части резервуара. Внешние силы, действующие на оставшуюся нижнюю часть резервуара (силы избыточного давления жидкости  $P_u$ , силы действия верхней части резервуара на нижнюю  $N$ ), спроектируем на вертикальную ось. Вертикальная составляющая силы  $P_u$  согласно формуле (4.43) равна весу тела давления, т. е. весу жидкости, заключенной в объеме  $abm n$ . Этот объем складывается из объема цилиндра  $W_1$  (объем  $abm n$ ) высотой  $h_1 = R + R \cos \theta$  с радиусом основания  $r = R \sin \theta$  и объема шарового сегмента  $W_2$  (объем  $m n$ ), высота которого  $h_2 = R - R \cos \theta$  с тем же радиусом основания  $r$ :

$$W_2 = \frac{\pi h_2^2}{3} \cdot (3R - h_2).$$

Таким образом,

$$P_{\text{верт}} = \gamma (W_1 + W_2) = \gamma \pi R^3 \left\{ \sin^2 \theta (1 + \cos \theta) + \frac{(1 - \cos \theta)^2}{3} \times [3 - (1 - \cos \theta)] \right\}.$$

Проекцию на вертикальную ось сил  $N$ , с которыми верхняя часть резервуара действует на нижнюю, вычислим по формуле

$$N_{\text{верт}} = \sigma 2\pi r S \sin \theta = \sigma 2\pi R S \sin^2 \theta.$$

Так как резервуар находится в равновесии, то силы  $P_{\text{верт}}$  и  $N_{\text{верт}}$  должны быть равны между собой.

Приравняв их, получим:

$$2\pi R \sigma S \sin^2 \theta = \gamma \pi R^3 \left\{ \sin^2 \theta (1 + \cos \theta) + \frac{(1 - \cos \theta)^2}{3} [3 - (1 - \cos \theta)] \right\},$$

откуда

$$\sigma = \frac{\gamma R^2}{2S} \left\{ (1 + \cos \theta) + \frac{(1 - \cos \theta)^2}{3 \sin^2 \theta} [3 - (1 - \cos \theta)] \right\};$$

заменяя

$$\sin^2 \theta = (1 - \cos \theta) \cdot (1 + \cos \theta),$$

после несложных преобразований получим:

$$\sigma = \frac{\gamma R^2}{3S} \cdot \left( \frac{5}{2} + \frac{\cos^3 \theta}{1 + \cos \theta} \right).$$

Для условий примера

$$\sigma = \frac{715 \cdot 5,25^2}{3 \cdot 0,010} \cdot \left( 2,5 + \frac{0,819^3}{1 + 0,819} \right) = 1\,884\,669 \text{ кг/м}^2 = 188,5 \text{ кг/см}^2.$$

**Задача 4-15.** Определить силу давления, воспринимаемую закруглением водопровода (фиг. 4-43), предполагая, что жидкость находится в покое. Весом жидкости пренебрегаем. Дано:  $\theta = 60^\circ$ ;  $d = 0,205 \text{ м}$ ; давление жидкости  $p = 4 \text{ кг/см}^2$ .



**Решение.** Рассмотрим объем жидкости, ограниченный фланцами  $a$  и  $b$ . Указанный объем находится под действием сил давления на поперечные ограничивающие сечения  $P$  и результирующей реакции стенок самого колена.

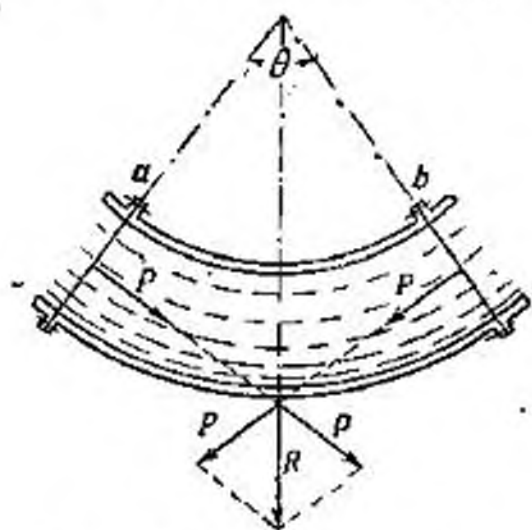
Результирующая давлений на поперечные ограничивающие сечения равна

$$R = 2p \cdot \frac{\pi d^2}{4} \sin \frac{\theta}{2} = 2 \cdot 4 \cdot \frac{\pi 20,5^2}{4} \sin 30^\circ = 1320 \text{ кг.}$$

Это результирующее давление и воспринимается коленом, т. е. уравновешивается реакцией стенок колена.

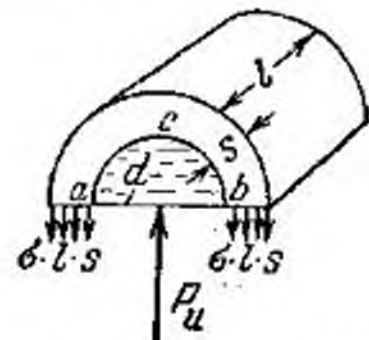
**Задача 4-16.** Определить максимальное давление, которое может быть сообщено жидкости в водопроводной трубе (фиг. 4-44), принимая во внимание напряжение, возникающее в материале трубопровода только от давления жидкости.

При определении соответствия трубопровода условиям прочности нужно исходить из тех давлений  $p_{\text{доп}}$ , которые допускаются техническими условиями и обычно указываются в ГОСТ на трубопроводы. Следует отметить, что напряжение в материале трубопровода, рассчитанное по допускаемому давлению  $p_{\text{доп}}$ , иногда



Фиг. 4-43. Водопроводное закругление. К задаче 4-15.

значительно меньше общепринятого допускаемого напряжения на растяжение для материала трубопровода.



Фиг. 4-44. Схема сил, действующих на рассеченный трубопровод. К задаче 4-16.

Дано: диаметр трубы  $d = 205$  мм; толщина стенки  $s = 10,5$  мм; длина трубы  $l = 4000$  мм; допускаемое напряжение в материале стенок трубы  $\sigma = 3$  кг/мм<sup>2</sup>.

**Решение.** Опасным сечением для трубы будет ее любое диаметрально сечение.

Силу давления жидкости на цилиндрическую поверхность  $acb$  определяют, пренебрегая весом жидкости, как силу давления жидкости на проекцию цилиндрической поверхности на диаметрально плоскость  $ab$  по формуле

$$P_u = p_u dl.$$

Указанная сила давления воспринимается двумя сечениями стенки трубы, поэтому  $p_u dl = 2sl\sigma$ , откуда

$$p_u = \frac{2s\sigma}{d} = \frac{2 \cdot 10,5 \cdot 3}{205} = 0,307 \text{ кг/мм}^2 = 30,7 \text{ кг/см}^2.$$

**Задача 4-17.** В центре  $A$  насосной (фиг. 4-45) камеры поршневого насоса в момент начала всасывания создается вакуум, соответствующий  $h_0 = 6$  м вод. ст. Определить результирующее усилие, с которым жидкость (вода), находящаяся во всасывающем трубопроводе и в насосной камере, действует на шаровой всасывающий клапан.

Дано:  $h = 5$  м,  $D = 70$  мм;  
 $d = 50$  мм.

Ответ:  $P = \gamma \left[ \frac{\pi D^2}{6} + \frac{\pi d^2}{4} (h_0 - h) \right] = 2,142 \text{ кг.}$

Результирующее усилие  $P$  направлено вверх.

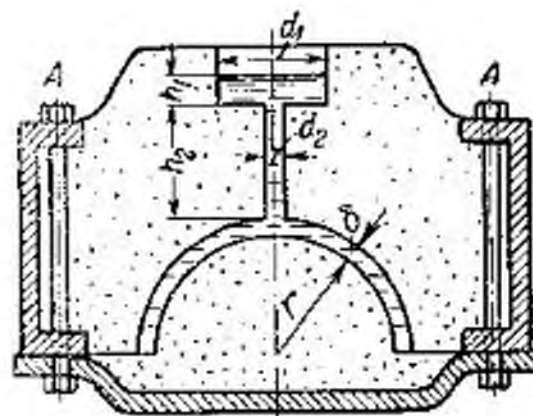
**Задача 4-18.** В литейной отформована и заливается чугуном цилиндрическая крышка длиной  $l = 500$  мм (фиг. 4-46). Определить сумму сил, действующих на болты  $A$ , если вес земли в верхней части опоки равен  $750$  кг, а  $r = 500$  мм,  $d = 15$  мм,  $d_1 = 150$  мм,  $d_2 = 30$  мм,  $h_1 = 100$  мм,  $h_2 = 300$  мм. Объемный вес чугуна см. табл. 2-4.

Ответ:  $1077$  кг.

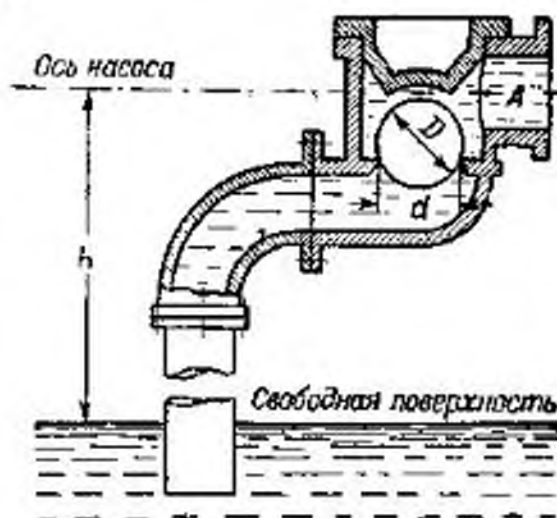
**Задача 4-19.** Определить силу избыточного давления жидкости на две одинаковые, но по-разному расположенные полусферические крышки в сосуде, наполненном водой. На фиг. 4-47 показано сечение сосуда вертикальной плоскостью.

Дано:  $d = 0,5$  м;  $h = 2$  м;  $\theta = 45^\circ$ .

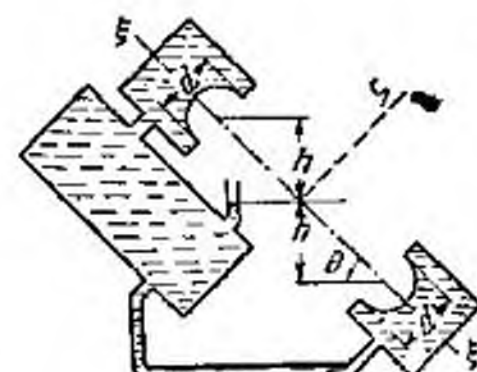
На свободной поверхности жидкости давление равно атмосферному.



Фиг. 4-46. Схема литейной опоки. К задаче 4-18.



Фиг. 4-45. Шаровой клапан в камере поршневого насоса. К задаче 4-17.



Фиг. 4-47. Сферические крышки. К задаче 4-19.

**Указание.** Равнодействующая сила, воспринимаемая каждой крышкой, равна геометрической сумме двух ее проекций на оси  $\xi$  и  $\zeta$ .

При определении проекции силы на ось  $\zeta$  поверхность каждой крышки необходимо разбить на две части, каждая из которых должна быть расположена лишь по одну сторону от оси  $\xi$ .

Ответ:  $P_\xi = 415,84$  кг;  $P_\zeta = 23,14$  кг.



### ГИДРОСТАТИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ ДЛЯ ЖИДКОСТИ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ОТНОСИТЕЛЬНОМ ПОКОЕ

Определение и несколько примеров относительного покоя были приведены в начале гл. 3. Достаточно подробно ниже будут рассмотрены лишь два частных случая относительного покоя, а именно: покой при переносном прямолинейном движении и покой при переносном вращательном движении вокруг вертикальной оси. Случай переносного вращательного движения вокруг горизонтальной оси, принципиально не отличающийся от предыдущего, будет рассмотрен в связи с осевым усилием в центробежном насосе.

Заметим, что жидкость, начавшая двигаться из состояния «абсолютного» покоя, приходит в состояние относительного покоя не сразу, причем переход из одного состояния в другое происходит под влиянием сил трения, хотя в самом состоянии относительного покоя силы трения и отсутствуют.

#### 5-1. Дифференциальное уравнение поверхности равного давления в жидкости, находящейся в относительном покое

Для получения уравнения поверхности равного давления будем исходить из уравнения (3-7):

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz). \quad (5-1)$$

В общем случае, как указывалось, под  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  следует подразумевать алгебраическую сумму проекций на соответствующие оси координат ускорений силы тяжести и силы инерции переносного движения.

Так как вдоль поверхности равного давления

$$dp = 0,$$

то

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0. \quad (5-2)$$

Уравнение (5-2) и является дифференциальным уравнением поверхности равного давления.

Это уравнение имеет определенный механический смысл. Из теоретической механики известно, что трехчлен (5-2) определяет элементарную работу массовых сил на перемещении  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ . Применительно к рассматриваемому случаю перемещение взято вдоль поверхности равного давления. Из (5-2) следует, что элементарная работа массовых сил вдоль поверхности равного давления равна нулю. Это значит, что в состоянии относительного покоя результирующее ускорение массовых сил перпендикулярно к соответствующему элементу поверхности равного давления.

#### 5-2. Относительный покой жидкости, находящейся в резервуаре, движущемся по наклонной плоскости с ускорением

Рассмотрим объем жидкости, находящейся в покое относительно резервуара, движущегося с постоянным ускорением  $a$  по наклонной плоскости (фиг. 5-1), образующей с горизонтом угол  $\alpha$ .

В рассматриваемом случае силами, действующими в жидкости, будут силы давления, силы тяжести и силы инерции переносного движения. Для любого элемента ускорение силы инерции  $j = a$ , но будет направлено в сторону, обратную ускорению резервуара  $a$ .

Результирующий вектор ускорений массовых сил — сил тяжести и сил инерции — определится диагональю параллелограмма, построенного на ускорении силы тяжести  $g$  и ускорении силы инерции  $j$ .

Элемент поверхности равного давления должен быть перпендикулярен к диагонали параллелограмма и образовывать с горизонтом угол  $\beta$ , тангенс которого равен:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{j \cos \alpha}{g - j \sin \alpha}. \quad (5-3)$$

Таким образом, поверхности равного давления, в том числе и свободная поверхность, образуют семейство параллельных плоскостей с углом наклона к горизонту  $\beta$ .

Если резервуар движется с постоянной скоростью ( $a = 0$ )

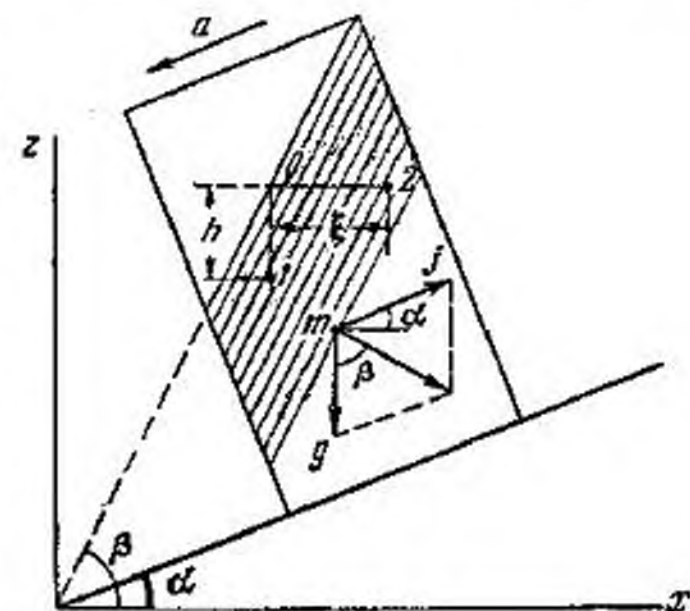
$$\operatorname{tg} \beta = 0;$$

$$\beta = 0.$$

В этом случае поверхности равного давления, в том числе и свободная поверхность, представляют собой горизонтальные плоскости.

В том случае, если резервуар спускается только под действием силы тяжести (сила трения резервуара о плоскость равна нулю),

$$j = g \sin \alpha, \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha, \beta = \alpha,$$



Фиг. 5-1. Резервуар с жидкостью движется поступательно.



откуда следует, что поверхности равного давления образуют семейство плоскостей, параллельных плоскости скатывания.

Если резервуар спускается с ускорением, но вертикально ( $\gamma = \frac{\pi}{2}$ )

$$\operatorname{tg} \beta = 0, \quad \beta = 0,$$

откуда следует, что поверхности равного давления образуют семейство горизонтальных плоскостей.

Найдем закон распределения давлений в вертикальной плоскости  $x = \text{const}$ . Для этого воспользуемся уравнением (5-1). Поскольку  $Y = 0$ , а для выбранной плоскости также и  $dx = 0$ , получим:

$$\rho Z dz = dp.$$

Заметим, что оси координат, показанные на фиг. 5-1, следует рассматривать движущимися вместе с резервуаром и что координаты частиц объема  $x$ ,  $y$  и  $z$ , входящие в уравнение (5-1), являются относительными.

Так как для оси  $z$ , параллельной силе тяжести,

$$Z = j \sin \alpha - g,$$

будем иметь:

$$\rho(j \sin \alpha - g) dz = dp,$$

откуда

$$z + \frac{p}{\rho(g - j \sin \alpha)} = \text{idem.}$$

Для двух частиц  $O$  и  $I$  с ординатами  $z_0$  и  $z_1$ , расположенных в вертикальной плоскости, имеем:

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho(g - j \sin \alpha)} = z_1 + \frac{p_1}{\rho(g - j \sin \alpha)},$$

или

$$p_1 = p_0 + \rho(g - j \sin \alpha) h. \quad (5-4)$$

Рассуждения, аналогичные предыдущим, позволяют получить уравнение для распределения давления в горизонтальной плоскости в виде:

$$p_2 = p_0 + \rho j \cos \alpha \xi. \quad (5-5)$$

При  $\alpha = 0$

$$p_1 = p_0 + \gamma h,$$

$$p_2 = p_0 + \rho j \xi.$$

Теперь свободная поверхность имеет угол наклона к горизонту согласно формуле (5-3), равный

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{j}{g}.$$

Заметим, что при  $\bar{a} = \bar{g}$ , т. е. когда резервуар свободно опускается вниз,  $p_1 = p_2 = p_0$ . Это значит, что во всем объеме жидкости давление имеет одно и то же значение.

Аналогично задача может быть решена и для иного направления движения, а также ускорения. Отметим, например, что все предыдущие выражения целиком сохранились бы, если бы резервуар поднимался, но равнозамедленно с ускорением  $a$ .

### 5-3. Относительный покой жидкости, находящейся в резервуаре, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью

Рассмотрим объем жидкости, находящейся в покое относительно круглого цилиндра, вращающегося с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  (фиг. 5-2).

В рассматриваемом случае, так же как и в предыдущем, силами, действующими в жидкости, будут силы давления, силы тяжести и силы инерции переносного движения. Траектории любой частицы жидкости суть окружности с центрами на оси вращения. Ускорения их — центростремительные, определяются по формуле

$$a = r\Omega^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \Omega^2, \quad (5-6)$$

где  $r$  — расстояние данной частицы от оси вращения.

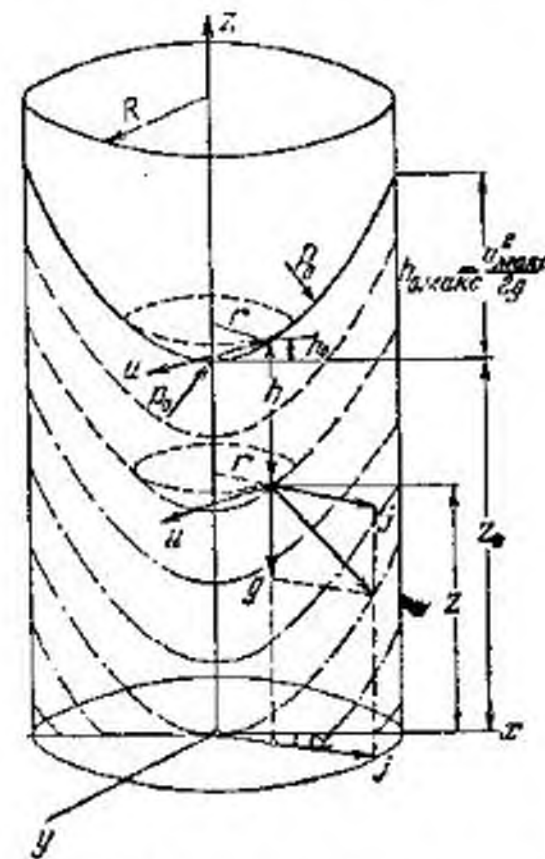
Для той же частицы ускорение силы инерции будет центробежным, равно  $j = \sqrt{x^2 + y^2} \Omega^2$  и направлено в сторону, противоположную  $a$ .

Результирующий вектор ускорений массовых сил (сил тяжести и сил инерции) определяется диагональю параллелограмма, построенного на ускорении силы тяжести  $g$  и ускорении силы инерции  $j$ .

Элемент поверхности равного давления будет перпендикулярен к диагонали параллелограмма, построенного на ускорении силы тяжести и ускорении силы инерции.

Для аналитического определения поверхности равного давления выберем относительные оси координат, как показано на фиг. 5-2.

Воспользуемся уравнением (5-2).



Фиг. 5-2. Резервуар с жидкостью вращается.



В рассматриваемом случае

$$\left. \begin{aligned} X &= j \cos \alpha = r\Omega^2 \cos \alpha = x\Omega^2; \\ Y &= j \sin \alpha = r\Omega^2 \sin \alpha = y\Omega^2; \\ Z &= -g. \end{aligned} \right\} \quad (5-7)$$

Подставляя значения  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  в уравнение (5-2) и интегрируя, получим:

$$\frac{\Omega^2}{2g} (x^2 + y^2) - z = C. \quad (5-8)$$

Таким образом, поверхности равного давления, в том числе и свободная поверхность, образуют семейство параболоидов вращения, сдвинутых вдоль вертикальной оси. Каждому значению  $p$  соответствует свой параболоид, характеризующийся некоторым значением постоянной  $C$ .

Постоянную интегрирования для параболоида свободной поверхности можно определить, принимая, что при  $z = z_0$  (фиг. 5-2)  $x = y = 0$ , откуда  $C = -z_0$ .

Этому значению  $C$  соответствует уравнение свободной поверхности в виде:

$$\frac{\Omega^2}{2} (x^2 + y^2) = g(z - z_0) = gh_0$$

или

$$\frac{u^2}{2g} = h_0, \quad (5-9)$$

где  $u = \Omega r$  — скорость частицы в переносном движении;  
 $h_0$  — высота частицы, расположенной на свободной поверхности над уровнем  $z_0$ .

Найдем закон распределения давления по объему. Для этого воспользуемся уравнением (5-1) и подставим в него значения  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  согласно формулам (5-7). После интегрирования получим:

$$p = \gamma \left( \frac{u^2}{2g} - z \right) + C. \quad (5-10)$$

Для  $z = z_0$  и  $u = 0$  должно быть  $p = p_0$ ,

поэтому из уравнения (5-10) находим:

$$C = p_0 + \gamma z_0,$$

и для давления в любой точке получаем следующую формулу:

$$p = p_0 + \gamma \left[ (z_0 - z) + \frac{u^2}{2g} \right]. \quad (5-11)$$

Для частиц, расположенных на одной вертикали, имеем:

$$p = p_0 + \gamma h, \quad (5-12)$$

где

$$h = z_0 + h_0 - z,$$

т. е. в рассматриваемом случае по вертикали существует обычный гидростатический закон распределения давления. Но здесь необходимо иметь в виду, что глубину погружения точки  $h$  надо исчислять от свободной поверхности, устанавливающейся при движении.

**Задача 5-1.** При отливке чугуна бандаж для колеса в целях придания чугуна большей плотности опока (фиг. 5-3), залитая чугуном, приводится во вращательное движение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\Omega = 20\pi$  1/сек, что соответствует 600 об/мин. Определить давление в точке  $m$ , если дано:  $D = 900$  мм;  $h = 200$  мм;  $\gamma = 7000$  кг/м<sup>3</sup>.

**Решение.** Для определения давления в точке  $m$  воспользуемся уравнением (5-11), в котором  $p_0$  — давление на свободной поверхности в литейнике, принимается за атмосферное,  $z_0 - z = h$ .

Таким образом, будем иметь:

$$p_m = p_{atm} + \gamma h + \frac{\rho \Omega^2 r^2}{2}.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$\begin{aligned} p_m &= 10\,000 + 7\,000 \cdot 0,2 + \\ &+ \frac{7\,000 \cdot 400 \cdot 3,14^2 \cdot 0,9^2}{9,81 \cdot 8} = \\ &= 295\,600 \text{ кг/м}^2 = 29,66 \text{ кг/см}^2. \end{aligned}$$

Следует обратить внимание на закон распределения давления. В этом уравнении первые два члена определяют гидростатическое давление в покоящейся жидкости. Давление, обусловливаемое вращением жидкости, определяется последним членом.

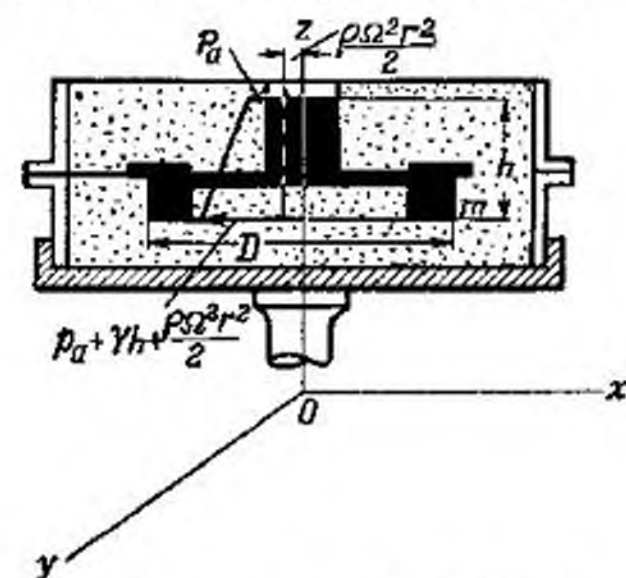
**Задача 5-2.** Жидкостный тахометр. Основной деталью жидкостного тахометра (фиг. 5-4) является диск 1, приводящийся во вращение гибким валом 2. Диск увлекает во вращение жидкость (масло) в полости 3, куда она поступает из полости 4 через радиальный канал втулки 5, осевой канал 6 и радиальный канал 7 диска 1. Создающееся в жидкости, находящейся в полости 3, давление измеряется пьезометром 8.

Требуется установить зависимость между числом оборотов диска и показанием пьезометра.

Полость 4 через отверстие в пробке 9 сообщается с атмосферой, поэтому избыточное давление в жидкости, заполняющей канал диска на его оси, будет равно:

$$p_0 = \gamma h.$$

Будем считать, что жидкость в полости 3 вращается с той же угловой скоростью  $\Omega$  1/сек, что и диск. В этом случае закон распределения избы-



Фиг. 5-3. Центробежное литье. К задаче 5-1.



точного давления в горизонтальной плоскости, совпадающей с плоскостью диска, подчиняется формуле (5-11), а именно:

$$p = \rho \frac{\Omega^2 r^2}{2} + \gamma h.$$

Для точки  $r = R$

$$p_R = \rho \frac{\Omega^2 R^2}{2} + \gamma h.$$

С другой стороны, то же давление может быть определено посредством пьезометра по формуле

$$p_R = \gamma (H - h),$$

где  $H$  — показание пьезометра, измеренное над уровнем покоящейся жидкости в полости 4. Уровню  $h$  на шкале прибора соответствует нуль.

Приравняв обе формулы для  $p_R$ , получим:

$$\Omega^2 = \frac{2gH}{R^2} = \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2,$$

откуда число оборотов диска в минуту

$$n = \frac{30}{\pi R} \cdot \sqrt{2gH} \text{ [об/мин]},$$

а для линейных размеров в метрах  $\sqrt{g} = \sim \pi$

$$n = \frac{42,3}{R} \cdot \sqrt{H} = C \sqrt{H},$$

где  $C = \frac{42,3}{R}$  — теоретическое значение постоянной прибора.

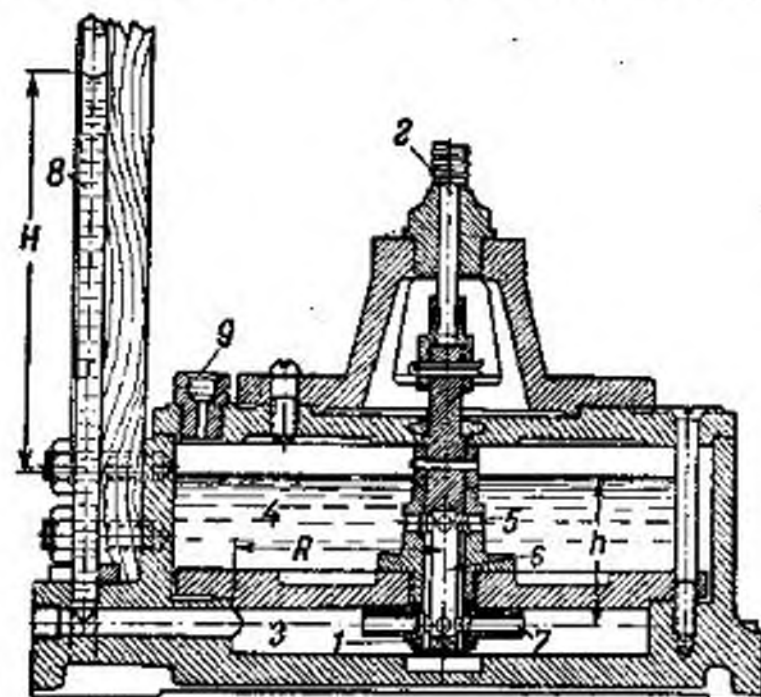
Учитывая сделанное выше допущение о движении жидкости в полости 3, значение  $C$ , соответствующее различным жидкостям, температурам, а также различным значениям  $n$ , лучше всего определить опытным путем, произведя тарировку тахометра.

**Задача 5-3.** Вертикальный вал имеет поддон для сбора масла, поступающего из подшипника (фиг. 5-5). Определить, на каком минимальном расстоянии от оси вала следует просверлить отверстие в дне поддона, чтобы масло могло стекать в маслоборник.

Задавыми величинами следует считать  $n$  — число оборотов вала в минуту — и верхнюю точку параболы  $A$  как предел наполнения маслом поддона, координируемую величинами  $r_A$  и  $h$ ; точка  $B$  отвечает пересечению параболы с дном поддона и определяет то минимальное расстояние от оси  $r_B$ , которое необходимо для сверления отверстия.

**Решение.** Из формулы (5-9) расстояние по вертикали между двумя точками свободной поверхности

$$h = \frac{\Omega^2 r_A^2 - \Omega^2 r_B^2}{2g},$$



Фиг. 5-4. Жидкостный тахометр. К задаче 5-2.

отсюда определим  $r_B$ :

$$r_B = \sqrt{\frac{\Omega^2 r_A^2 - 2gh}{\Omega^2}} = \sqrt{r_A^2 - \frac{2gh}{\Omega^2}},$$

так как угловая скорость

$$\Omega = \frac{\pi n}{30},$$

то выражение для  $r_B$  примет вид:

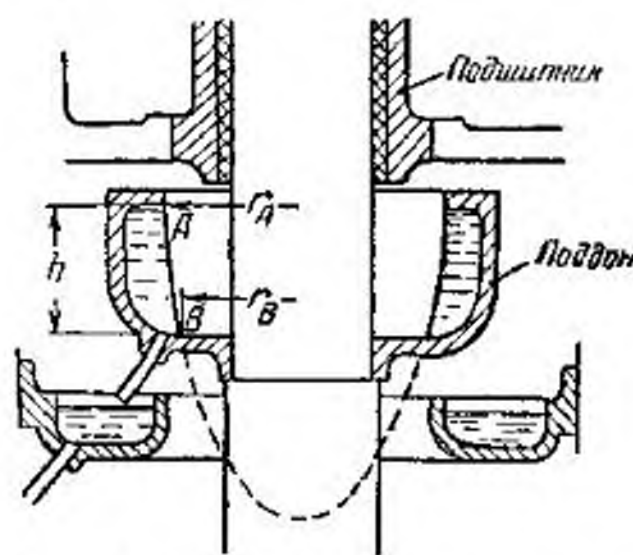
$$r_B = \sqrt{r_A^2 - \frac{2gh30^2}{\pi^2 n^2}},$$

для метровых размеров  $\pi^2 \approx g$ , поэтому:

$$r_B = \sqrt{r_A^2 - \frac{1800h}{n^2}}.$$

При  $n = 300$  об/мин,  $r_A = 0,4$  м,  $h = 0,2$  м:

$$r_B = \sqrt{0,16 - \frac{1800 \cdot 0,2}{90000}} = 0,395 \text{ м.}$$



Фиг. 5-5. Маслоборник. К задаче 5-3.

В данном случае для участка параболы между точками  $A$  и  $B$  имеем почти вертикальное положение.

#### 5-4. Относительный покой жидкости, находящейся в резервуаре, вращающемся вокруг горизонтальной оси

Исследуемый случай, например, имеет место при определении осевого усилия в центробежном насосе (фиг. 5-6), в котором жидкость, заполняющая боковое пространство  $C$  в корпусе насоса, рассматривается вращающейся как твердое тело, т. е. находится в относительном покое.

Найдем закон распределения давления в жидкости, заполняющей пространство  $C$ . Для указанной цели воспользуемся дифференциальным уравнением (5-1). Рассмотрим некоторую частицу  $m$ , которая находится на расстоянии  $r$  от оси вращения и радиус вращения которой образует с осью  $y$  угол  $\alpha$ :

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = dp,$$

где  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  — проекции на оси координат ускорения равнодействующей объемных сил, каковыми в данном случае будут являться сила тяжести и центробежная сила инерции переносного движения.

Найдем их проекции на оси координат:

$$X = 0; Y = r\Omega^2 \cos \alpha; Z = -g + r\Omega^2 \sin \alpha.$$



Так как  $r \cos \alpha = y$  и  $r \sin \alpha = z$ , где  $y$  и  $z$  — относительные координаты, то

$$X = 0; Y = y\Omega^2; Z = -g + z\Omega^2.$$

Подставляя эти значения в дифференциальное уравнение, будем иметь:

$$dp = \rho [\Omega^2(zdz + ydy) - g dz].$$

Интегрируя, находим закон распределения давления:

$$p = \rho \left[ \frac{\Omega^2}{2} (z^2 + y^2) - gz \right] + C.$$

Если пренебречь влиянием веса жидкости, для закона распределения давления  $p$  получим следующее выражение:

$$p = \rho \frac{\Omega^2}{2} (z^2 + y^2) + C,$$

или

$$p = \rho \frac{\Omega^2 r^2}{2} + C.$$

Постоянную интегрирования  $C$  определим по давлению  $p_2$ , развиваемому насосом по выходе жидкости из рабочего колеса на окружности радиусом  $r_2$ .

Полагая  $r = r_2$  и  $p = p_2$ , найдем:

$$C = p_2 - \rho \frac{\Omega^2 r_2^2}{2}.$$

Таким образом, закон распределения давления выразится следующей формулой:

$$p = p_2 - \frac{\rho \Omega^2}{2} (r_2^2 - r^2).$$

Этой формуле соответствует эпюра давлений, изображенная на фиг. 5-7.

Поверхность давлений представляет собой параболоид вращения с осью, совпадающей с осью вращения насоса (вала).

В заключение определим поверхности равного давления. Для указанной цели воспользуемся уравнением (5-2). Подставляя в него значения  $X, Y, Z$  и производя интегрирование, получим уравнение поверхности равного давления:

$$\frac{\Omega^2}{2} (z^2 + y^2) - gz = C.$$

Это уравнение может быть приведено к виду:

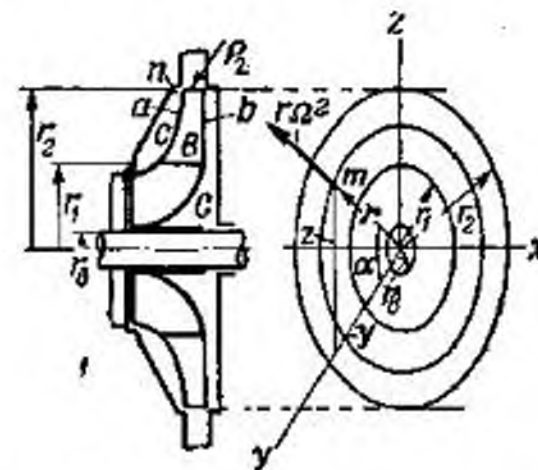
$$y^2 + \left( z - \frac{g}{\Omega^2} \right)^2 = C_1.$$

Таким образом, поверхности равного давления образуют семейство концентрических круглых цилиндров с осью, параллельной оси и сдвинутой по оси  $z$  вверх на расстояние  $g/\Omega^2$ .

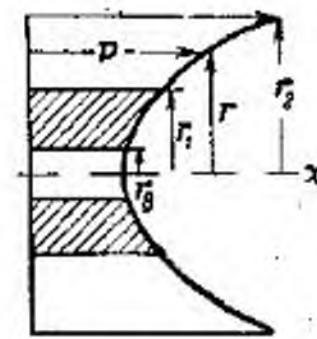
Если пренебречь весом жидкости, то для поверхности равного давления получим выражение:

$$\frac{\Omega^2}{2} (z^2 + y^2) = C_1,$$

т. е. в этом случае поверхность изобразится также круглыми цилиндрами, но с осью, совпадающей с осью  $x$ .



Фиг. 5-6. Схематичный разрез колеса центробежного насоса. К задаче 5-4.



Фиг. 5-7. Эпюра давлений. К задаче 5-4.

**Задача 5-4.** Осевое усилие в центробежном насосе. Жидкость, заполняющая пространство  $C$  и увлекаемая рабочим колесом  $B$  центробежного насоса (фиг. 5-6), оказывает давление на боковые поверхности  $a$  и  $b$  рабочего колеса, благодаря чему в осевом направлении возникает усилие, сдвигающее рабочее колесо. Требуется определить это горизонтальное усилие согласно следующим данным:  $r_2 = 154$  мм;  $r_1 = 77$  мм;  $r_0 = 30$  мм;  $\Omega_0 = 152$  1/сек.;  $p_2 = 2,3$  кг/см<sup>2</sup>.

При решении задачи делаем три допущения:

1. Считаем, что вся масса жидкости в пространстве  $C$  вращается как твердое тело с угловой скоростью  $\Omega$ , равной половине угловой скорости рабочего колеса насоса  $B$ :

$$\Omega = 0,5\Omega_0.$$

2. Считаем, что дросселирующее влияние зазора  $n$  у выхода из рабочего колеса невелико, благодаря чему давление у зазора в пространстве  $C$  равно давлению  $p_2$ , развиваемому насосом по выходе из рабочего колеса.

3. Считаем, что в пространстве  $C$  с обеих сторон рабочего колеса действует один и тот же закон распределения давлений.

Так как мы принимаем, что закон распределения давлений с обеих сторон рабочего колеса одинаков, то результирующей силой осевого давления будет сила давления на кольцевую поверхность с радиусом  $r_1$  и  $r_2$ .

Соответствующая область эпюры давлений заштрихована на фиг. 5-7. Для определения результирующего осевого усилия разобьем площадь



кольца на элементарные кольцевые площадки  $d\omega = 2\pi r dr$  и вычислим интеграл:

$$P[kГ] = \int_{r_a}^{r_1} p d\omega = \int_{r_a}^{r_1} \left[ p_2 - \frac{\rho \Omega^2}{2} (r_2^2 - r^2) \right] 2\pi r dr.$$

После интегрирования получим:

$$P[kГ] = \pi (r_1^2 - r_a^2) \left[ p_2 - \frac{\rho \Omega^2}{2} \left( r_2^2 - \frac{r_1^2 + r_a^2}{2} \right) \right].$$

Подставляя данные и принимая для воды  $\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{1000}{9,81} = 102 \text{ кГ} \cdot \text{сек}^2/\text{м}^4$ ,

найдем:

$$P = \pi (0,077^2 - 0,030^2) \left[ 23000 - \frac{102 \cdot 76^2}{2} \cdot \left( 0,154^2 - \frac{0,077^2 + 0,030^2}{2} \right) \right] = 270,15 \text{ кГ}.$$

### Глава шестая

## ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАВАНИЯ

Приводимый здесь материал в основном излагается по работе выдающегося русского ученого акад. А. Н. Крылова «Теория корабля». В этой главе освещаются вопросы, относящиеся лишь к одному разделу этой теории, а именно к остойчивости плавающего тела, огромная роль в исследовании которой принадлежит Л. Эйлеру. Такие вопросы теории корабля, как качка корабля, поворотливость, вибрация, теория непотопляемости и ряд других, которые были разработаны академиком А. Н. Крыловым и создали мировую славу их автору и всей русской школе по «теории корабля», здесь не затрагиваются, как выходящие за пределы программы курса гидравлики. Некоторые вопросы о сопротивлении жидкости движущимся телам будут изложены в гл. 22.

### 6-1. Основные определения. Закон Архимеда

На тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, называемая поддерживающей силой, направленная вверх и равная весу вытесненной им жидкости.

Поддерживающая сила является равнодействующей сил давления, с которыми жидкость, находящаяся в покое, действует на покоящееся в ней тело.

Для определения поддерживающей силы разобьем поверхность плавающего тела на верхнюю и нижнюю части и определим давление жидкости на каждую из частей. Так как в общем случае поверхность тела может быть криволинейной, то каждая из сил может оказаться расположенной в пространстве. Разложим эти силы и определим сначала их вертикальные составляющие  $P_{1z}$  и  $P_{2z}$  (фиг. 6-1).

Вертикальная составляющая  $P_{1z}$  будет направлена вниз и согласно формуле (4-43) равна:

$$P_{1z} = \rho_{\text{ат}} \omega_1 + \gamma W_1, \quad (6-1)$$

где  $\omega_1$  — проекция на горизонтальную плоскость площади поверхности верхней части тела, а  $W_1$  — объем тела давления, соответствующий ей.

Вертикальная составляющая  $P_{2z}$  будет направлена вверх и равна:

$$P_{2z} = \rho_{\text{ат}} \omega_2 + \gamma W_2, \quad (6-2)$$

где  $\omega_2 = \omega_1$  и  $W_2$  имеют тот же смысл, что и раньше, но соответствуют нижней части поверхности тела, причем

$$W_2 = W_1 + W, \quad (6-3)$$

а  $W$  — объем тела, равный объему вытесненной телом жидкости.

Поддерживающая сила равна разности вертикальных составляющих

$$P = P_{2z} - P_{1z} = \gamma W. \quad (6-4)$$

Объем жидкости, вытесненный плавающим телом, называется *объемным водоизмещением*.

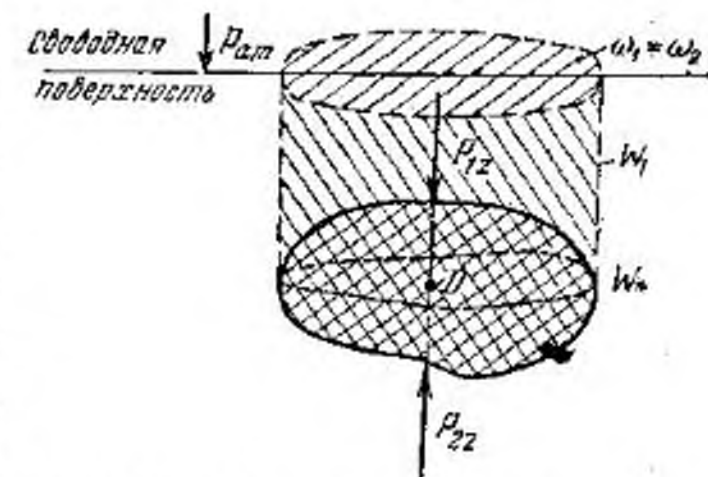
Для определения горизонтальной составляющей давлений поверхность тела надо было бы разбить также на две части, но расположенные слева и справа. Легко при этом доказать, что горизонтальные составляющие взаимно уравновешиваются. Таким образом, давление жидкости на плавающее тело приводит только к одной поддерживающей силе.

Линия действия поддерживающей силы проходит через центр тяжести вытесненного объема жидкости, который называется центром водоизмещения или центром давления  $D$ . Обычно принято считать, что поддерживающая сила приложена в центре водоизмещения.

В общем случае центр водоизмещения  $D$  (фиг. 6-2, 6-3) не совпадает с центром тяжести  $T$  плавающего тела. Оба эти центра в нормальном положении плавающего тела располагаются на вертикальной оси, которая называется осью плавания.

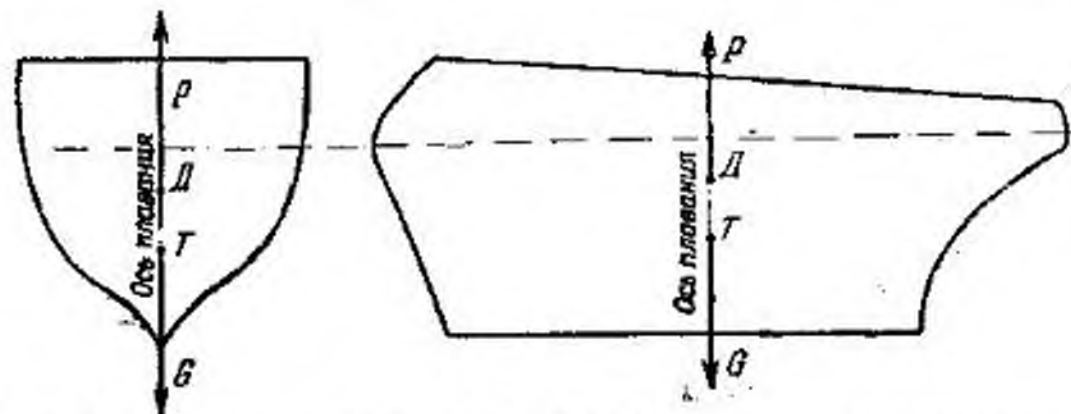
Тело тонет, если вес тела  $G$  больше величины поддерживающей силы  $P$ . Тело всплывает на поверхность, если вес тела  $G$  меньше поддерживающей силы  $P$ .

При всплывании тела на поверхность вместе с уменьшением объема жидкости, вытесняемого телом, будет уменьшаться и ве-



Фиг. 6-1. Поддерживающая сила приложена в центре тяжести вытесненного объема — в центре водоизмещения.





Фиг. 6-2. Центр тяжести  $T$  и центр водоизмещения  $D$  расположены на оси плавания.

Фиг. 6-3. Центр тяжести расположен ниже центра водоизмещения.

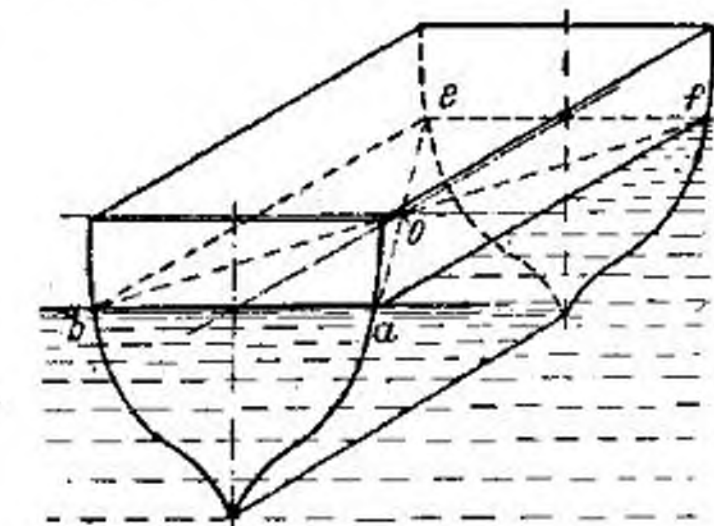
личина поддерживающей силы. Тело будет плавать на поверхности, если поддерживающая сила делается равной весу тела, т. е.  $P = G$ .

Равенство поддерживающей силы и веса тела необходимо также и для того, чтобы тело плавало на любой глубине (например, подводная лодка).

Плоскость свободной поверхности жидкости, пересекающая плавающее тело, называется плоскостью плавания.

Периметр сечения плавающего тела плоскостью плавания (линия  $abe\bar{f}$  — фиг. 6-4) называется ватерлинией.

Площадь, ограниченная ватерлинией, называется площадью ватерлинии.



Фиг. 6-4. Площадь  $abe\bar{f}$  — площадь ватерлинии.

Пловучестью тела называется его способность плавать при заданном весе. Мерой пловучести плавающего тела является водоизмещение.

Плавающее тело должно обладать запасом пловучести; запасом пловучести называют допустимую перегрузку плавающего тела, при которой оно еще не пойдет ко дну. Запас пловучести зависит от высоты надводного борта и устанавливается законоположениями.

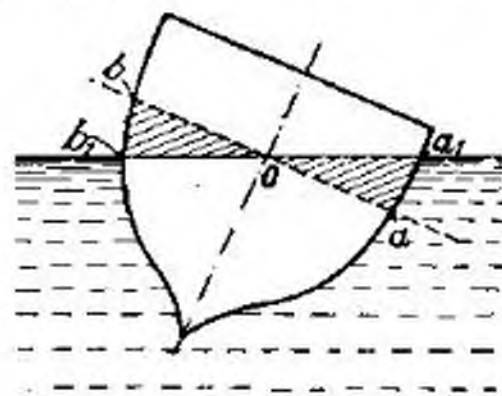
## 6-2. Теорема Эйлера о крене

Л. Эйлером была доказана следующая теорема.

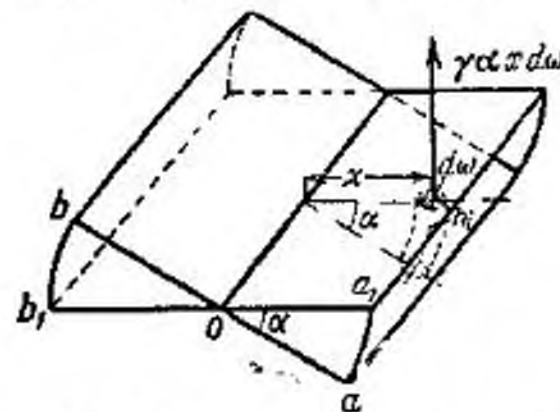
При крене плавающего тела вокруг горизонтальной оси на бесконечно малый угол, при котором не изменяется величина поддерживающей силы, две смежные площади ватерлинии пере-

секаются по прямой, проходящей через центр тяжести площади ватерлинии, соответствующей данному положению.

В самом деле, в обоих положениях тела поддерживающая сила сохраняет постоянную величину, равную весу тела. Отсюда следует, что величина объема жидкости, вытесненного телом, в том и другом случае одна и та же. Изменяется лишь форма вытесненного объема. Объем увеличивается (фиг. 6-5) на клинообразную заштрихованную часть справа ( $oaa_1$ ) и уменьшается



Фиг. 6-5. Клинообразные объемы равны друг другу.



Фиг. 6-6. При малом крене  $\alpha = \sin \alpha$ .

на клинообразную заштрихованную часть слева ( $obb_1$ ). Поэтому увеличение поддерживающей силы справа будет равняться уменьшению поддерживающей силы слева, откуда следует, что заштрихованные клинообразные объемы слева и справа должны быть равны между собой. Вычислим эти объемы (фиг. 6-6). Клинообразный объем справа или слева будет равен сумме элементарных объемов. Каждый из элементарных объемов может быть принят за объем бесконечно малого цилиндра, имеющего основанием  $d\omega$  в плоскости ватерлинии и высоту  $h_1 = x\alpha$ .

Объем справа будет равен:

$$W_1 = \int_1 h_1 d\omega = \int_1 x\alpha d\omega.$$

Объем слева будет равен:

$$W_2 = \int_2 h_2 d\omega = - \int_2 x\alpha d\omega.$$

Так как объемы равны, т. е.  $W_1 = W_2$ , то

$$\int_1 x\alpha d\omega = - \int_2 x\alpha d\omega.$$

Сокращая на  $\alpha$ , получаем:

$$\int_1 x d\omega + \int_2 x d\omega = 0. \quad (6-5)$$



Из формулы (6-5) следует, что статический момент площади ватерлинии относительно линии пересечения двух смежных площадей равен нулю, а это значит, что линия пересечения проходит через центр тяжести площади ватерлинии, соответствующей данному положению.

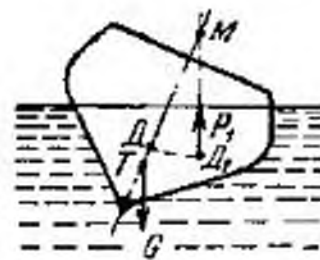
### 6-3. Статическая остойчивость

Каждое плавающее тело должно обладать остойчивостью. При этом различают остойчивость статическую и динамическую. Сначала исследуем статическую остойчивость.

Под статической остойчивостью подразумевается способность плавающего тела плавать в нормальном положении и в случае статического нарушения нормального положения вследствие крена возвращаться в прежнее положение, как только силы, вызывав-



Фиг. 6-7. При крене центр водоизмещения перемещается по линии центров водоизмещения.



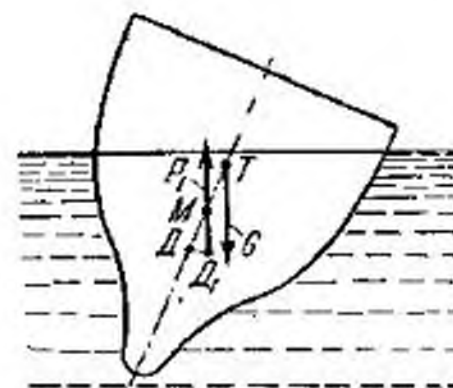
Фиг. 6-8. Точка  $M$  — метациентр. Тело остойчиво.

шие крен, прекратят свое действие. При статическом нарушении нормального положения силы, действующие на тело, находятся практически в равновесии и скорость тела равна практически нулю.

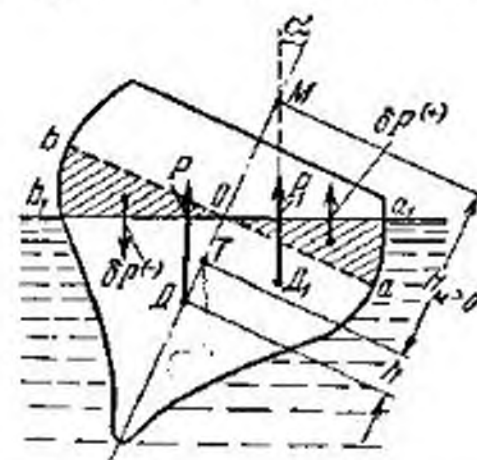
При исследовании остойчивости необходимо иметь в виду, что при крене твердого плавающего тела его центр тяжести является всегда одной и той же точкой (случай, когда на плавающем теле находится жидкий груз, здесь не рассматривается). Центр же водоизмещения вследствие того, что изменяется форма объема вытесненной телом жидкости, перемещается по линии, называемой линией центров водоизмещения (фиг. 6-7), поэтому при крене плавающего тела сила тяжести и равная ей по величине поддерживающая сила всегда создают пару сил. Для того чтобы тело обладало статической остойчивостью, необходимо, чтобы эта пара сил стремилась вернуть тело в нормальное положение. Это, например, будет иметь место во всех случаях, когда центр водоизмещения расположен выше центра тяжести (фиг. 6-8). Но в большинстве случаев центр водоизмещения расположен ниже центра тяжести (фиг. 6-7, 6-9). Здесь могут представиться два случая.

Первый случай — устойчивое равновесие (фиг. 6-7). При крене тела по часовой стрелке центр водоизмещения располагается правее линии действия силы тяжести. В этом случае линия действия поддерживающей силы  $P$  пересекает ось плавания в точке  $M$ , расположенной выше центра тяжести. Создающаяся при этом пара ( $P_1 - G$ ) стремится вернуть тело в положение равновесия.

Второй случай — неустойчивое равновесие (фиг. 6-9). При крене тела по часовой стрелке центр водоизмещения располагается левее линии действия силы тяжести. В этом случае линия действия поддерживающей силы  $P_1$  пересекает ось плавания в



Фиг. 6-9. Точка  $M$  — метациентр. Тело не остойчиво.



Фиг. 6-10. Точка  $M$  — метациентр. Тело остойчиво.

точке  $M$ , расположенной ниже центра тяжести. Создающаяся при этом пара ( $P_1 - G$ ) стремится опрокинуть тело.

Точка  $M$  пересечения линии действия поддерживающей силы с осью плавания при малых углах крена называется начальным метациентром.

Расстояние  $H_0$  от начального метациентра до центра тяжести плавающего тела называется начальной метациентрической высотой (фиг. 6-10). Расстояние  $H_0 + h$  от начального метациентра до центра водоизмещения называется начальным метациентрическим радиусом. В общем случае крена, т. е. при больших углах крена, метациентрический радиус следует рассматривать как радиус кривизны линии центров водоизмещения, а метациентр как центр кривизны этой линии, причем при больших углах крена метациентр уже не расположен на оси плавания.

Из сказанного следует, что для того, чтобы тело обладало статической остойчивостью, необходимо, чтобы метациентр находился выше центра тяжести, т. е. чтобы метациентрическая высота  $H_0$  была положительна.

Выразим это условие для начального метациентра аналитически.

Поддерживающую силу  $P_1$ , соответствующую крену, приложенную в точке  $D_1$ , можно рассматривать как равнодей-



ствующую поддерживающей силы нормального положения (численно равной  $P_1$ ) и двух дополнительных сил, возникших в результате погружения клинообразного объема справа (положительная поддерживающая сила  $\delta P^{(+)}$ ) и выхода из жидкости клинообразного объема слева (отрицательная поддерживающая сила  $\delta P^{(-)}$ ). Оба клинообразных объема на фиг. 6-10 заштрихованы. Поэтому сумма моментов сил  $P$ ,  $\delta P^{(+)}$  и  $\delta P^{(-)}$  должна равняться моменту силы  $P_1$ .

Моменты сил  $P$  и  $P_1$  вычислим относительно центра водоизмещения  $D$ . Момент сил  $\delta P^{(+)}$  и  $\delta P^{(-)}$  можно вычислять относительно любой оси (в данном случае относительно продольной оси, проходящей через центр тяжести площади ватерлинии — точку  $O$ ), так как эти силы образуют пару. Но момент силы  $P$  относительно центра водоизмещения  $D$  равен нулю. Поэтому момент силы  $P_1$  должен быть равен моменту  $M$  пары  $\delta P^{(+)}$  и  $\delta P^{(-)}$ , т. е.

$$P_1(H_m + h) \sin \alpha = M. \quad (6-6)$$

Момент  $M$  равен сумме моментов элементарных поддерживающих сил (фиг. 6-6 и 6-10) элементарных объемов, образованных бесконечно малыми цилиндрами, имеющими основанием  $d\omega$  (в плоскости ватерлинии) и высоту  $h_i = x\alpha$ .

Момент элементарной поддерживающей силы равен произведению элементарной поддерживающей силы на плечо  $x$ . Так как элементарная сила равна произведению объемного веса жидкости на элементарный объем, равный, как уже было найдено раньше,  $x\alpha d\omega$ , то элементарный момент будет равен:

$$dM = \gamma x \alpha d\omega x = \gamma \alpha x^2 d\omega; \\ M = \int \gamma \alpha x^2 d\omega = \gamma \alpha \int x^2 d\omega = \gamma \alpha J, \quad (6-7)$$

где  $J = \int x^2 d\omega$  — момент инерции площади ватерлинии относительно оси, проходящей через центр тяжести этой площади.

Таким образом,

$$P(H_m + h) \sin \alpha = \gamma \alpha J. \quad (6-8)$$

Принимая попрежнему для малых углов  $\sin \alpha = \alpha$  и учитывая, что  $P = \gamma W$ , получим для метацентрической высоты  $H_m$  следующее выражение:

$$H_m = \frac{J}{W} - h, \quad (6-9)$$

где  $W$  — объемное водоизмещение. Для случая, когда центр водоизмещения расположен выше центра тяжести, величина  $h$

отрицательна; при вычитании отрицательной величины  $H_m$  получается всегда положительная.

Метацентрическая высота может быть положительной — в этом случае равновесие плавающего тела устойчивое, равна нулю — равновесие плавающего тела безразличное, отрицательной — равновесие неустойчивое.

Зная метацентрическую высоту, легко определить и момент пары  $(P_1 - G)$ , стремящийся возвратить повернутое плавающее тело в положение равновесия, т. е. определить восстанавливающий момент (метацентрический момент),

$$M_m = PH_m \sin \alpha = P \left( \frac{J}{W} \pm h \right) \sin \alpha. \quad (6-10)$$

Эта формула называется метацентрической формулой устойчивости.

Следует подчеркнуть, что формула (6-10) справедлива как для крена относительно продольной оси, так и относительно поперечной оси. Для каждого из этих случаев в формулу необходимо подставить соответствующее значение момента инерции площади ватерлинии.

При крене относительно продольной оси соответствующий этому метациентр называется поперечным, а при крене относительно поперечной оси — продольным.

Степень точности формулы устойчивости зависит от формы плавающего тела и пользоваться ею при значительных углах крена надо осторожно. Акад. А. Н. Крылов считал крен еще малым, если он не превышает  $15-20^\circ$  для высокобортных судов, а для низкобортных судов, — пока кромка палубы не погрузится в воду. Для этих углов положение метациентра практически остается постоянным.

Из предыдущего следует, что при проектировании плавающего тела необходимо добиться того, чтобы метацентрическая высота была положительна при всяких возможных условиях плавания.

Увеличения метацентрической высоты можно достичь уширением корпуса плавающего тела в области ватерлинии путем установки специальных плавников или понижением центра тяжести устройством утяжеленного киля.

В зависимости от назначения плавающего тела для поперечной метацентрической высоты ориентировочно можно указать следующие значения:

- а) для небольших судов типа буксиров  $H_m = 0,3 \div 0,6$  м;
- б) для коммерческих судов  $H_m = 0,5 \div 1,2$  м;
- в) для боевых кораблей  $H_m = 1 \div 1,5$  м.

Необходимо отметить, что изменение веса плавающего тела влияет на устойчивость, а также то, что наличие жидкого груза,



который при крене может переливаться, вызывает уменьшение устойчивости.

Для значительных углов крена формулы (6-9) и (6-10) становятся неточными и метацентрический момент  $M_{\mu}$  будет более сложной функцией угла крена

$$M_{\mu} = M(\alpha). \quad (6-11)$$

Зависимость метацентрического момента от угла крена можно установить экспериментально. Для этой цели помещают на равных расстояниях от оси плавания два одинаковых груза каждый весом  $G_k$  (фиг. 6-11).

Затем переносят, например, груз  $G_k$  слева к грузу  $G_k$  справа. Это будет равносильно приложению к плавающему телу пары сил, создающей крен, момент которой равен:

$$M_k = 2G_k b \cos \alpha.$$

Фиг. 6-11. Схема сил, действующих на тело, выведенное из положения равновесия.

Плавающее тело, получив крен на угол  $\alpha$ , займет некоторое положение равновесия.

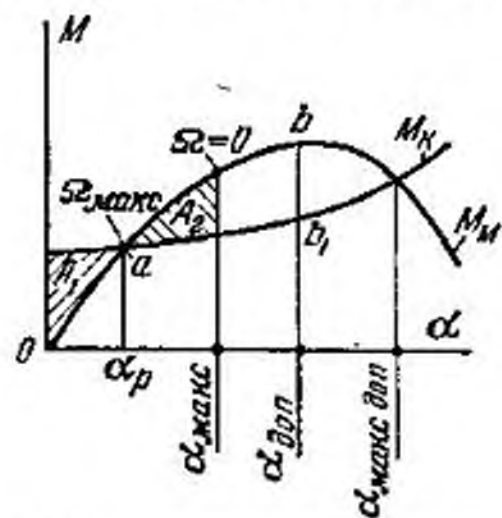
В условиях равновесия момент  $M_k$  должен быть равен восстанавливающему (метацентрическому) моменту  $M_{\mu}$ :

$$M_{\mu} = 2G_k b \cos \alpha. \quad (6-12)$$

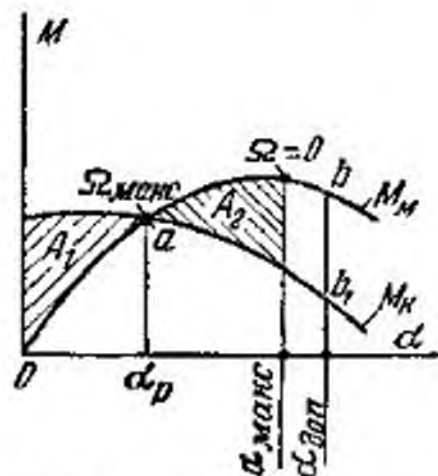
Метацентрическую высоту найдем по формуле

$$H_{\mu} = \frac{M_{\mu}}{G \sin \alpha} = \frac{2G_k b \operatorname{ctg} \alpha}{G}, \quad (6-13)$$

где  $G$  включает также и вес грузов, создающих крен.



Фиг. 6-12. В положении максимального угла крена площадь  $A_2 = A_1$ .



Фиг. 6-13. В положении максимального угла крена площадь  $A_2 = A_1$ .

Повторив этот опыт несколько раз для различных значений  $G_k$ , можно построить зависимости  $M_{\mu}$  и  $H_{\mu}$  от угла крена  $\alpha$ .

На фиг. 6-12 показана форма кривой  $M_{\mu}$ .

Формулой (6-13) можно пользоваться также и для определения центра тяжести плавающего тела, если ранее, например, аналитически был найден метациентр<sup>1</sup>.

#### 6-4. Динамическая устойчивость

Динамической устойчивостью называется способность плавающего тела совершать колебания под действием сил, создающих кренящие моменты, в пределах заданных углов крена.

Законы изменения кренящих моментов  $M_k$  весьма разнообразны. На фиг. 6-12 и 6-13 показаны два частных случая. Под действием сил тело получит перемещение, которое разложим на вращательное вокруг оси, проходящей через центр соответствующей площади ватерлинии, и на поступательное вместе с ней. Для исследования устойчивости важным является только вращательная часть перемещения.

В рассматриваемом случае в отличие от статического кренящие моменты  $M_k$  не равны восстанавливающим  $M_{\mu}$ . Поэтому при незначительных углах крена, когда восстанавливающий момент  $M_{\mu}$  меньше  $M_k$ , тело будет крениться с возрастающей угловой скоростью. Увеличение угловой скорости (разгон) будет происходить до угла крена  $\alpha_p$ , при котором  $M_{\mu} = M_k$ . В этом положении плавающее тело приобретет максимальную угловую скорость. При дальнейшем увеличении угла крена восстанавливающий момент становится больше  $M_k$  и вращение плавающего тела станет замедленным. Крен на мгновение прекратится при некотором угле  $\alpha_{\max}$ , после чего плавающее тело начнет вращаться в обратном направлении.

Если бы силы трения отсутствовали, то плавающее тело колебалось бы в ту и другую сторону бесконечно. Благодаря силам трения колебания являются затухающими. При остановке крен тела будет соответствовать углу  $\alpha_p$ .

Чтобы определить максимальный угол крена  $\alpha_{\max}$ , заметим, что диаграмму моментов можно рассматривать как диаграмму работ, совершаемых моментами  $M_{\mu}$  и  $M_k$  при крене. Будем считать работу  $M_k$  положительной, а работу  $M_{\mu}$  — отрицательной.

<sup>1</sup> Собрание трудов акад. А. Н. Крылова, т. IX, ч. 2, 1949.



За время крена от угла  $\alpha = 0$  до угла  $\alpha_p$  суммарная ра-

бота  $A_1 = \int_0^{\alpha_p} (M_k - M_m) d\alpha$  будет положительной; на диаграмме

работы  $A_1$  изображается площадью  $A_1$  и затрачивается на со-  
общение плавающему телу кинетической энергии. За время  
крена от угла  $\alpha_p$  до угла  $\alpha_{\max}$  суммарная работа  $A_2$  — отри-  
цательная, что вызывает уменьшение ранее накопленной  
кинетической энергии. На диаграмме эта работа изображается  
площадью  $A_2$ . Очевидно, крен достигает максимума при угле  
 $\alpha_{\max}$  при котором

$$A_1 = A_2.$$

Максимальный угол крена  $\alpha_{\max}$  не должен превосходить  
допускаемого  $\alpha_{\text{доп}}$ , значение которого устанавливается техни-  
ческими условиями. В этом случае будем считать, что тело  
при заданном кренящем моменте  $M_k$  обладает динамической  
стойчивостью. Чем больше площадь  $A = \text{пл. } (abb_1)$ , ограни-  
ченная углом  $\alpha_p$  и  $\alpha_{\text{доп}}$ , по сравнению с площадью  $A_2 = A_1$ ,  
тем большей динамической стойчивостью обладает плаваю-  
щее тело. Отношение  $\frac{A}{A_1} = \varepsilon$  называется относительным запа-  
сом динамической стойчивости. Если бы при кренящем мо-  
менте, изображенном на фиг. 6-12, при первом размахе  
крен превзошел угол  $\alpha_{\text{макс доп}}$ , то плавающее тело опроки-  
нулось бы (соотношение площадей на фигуре этому случаю  
не соответствует).

**Задача 6-1.** Определить глубину погружения плавающего танка, допу-  
ская, что центр тяжести танка  $T$  и центр водовмещения  $D$  расположены  
на оси плавания  $00$ . Вес танка  $G = 2925 \text{ кг}$ ; ширина танка  $b = 2 \text{ м}$ ;  $R =$   
 $= 1,25 \text{ м}$ ;  $a = 2 \text{ м}$ .

**Решение.** Применяя основную формулу плавания, согласно которой вес  
танка равен подъемной силе, т. е.

$$G = P = \gamma W,$$

определяем объемное водоизмещение:

$$W = \frac{G}{\gamma} = \frac{2925}{1000} = 2,925 \text{ м}^3.$$

Но водоизмещение танка при принятых на чертеже обозначениях рав-  
но:

$$W = b \left[ aR(1 - \cos \theta) + \left( \frac{\theta R^2}{2} - \frac{R^2 \sin \theta \cos \theta}{2} \right) \right].$$

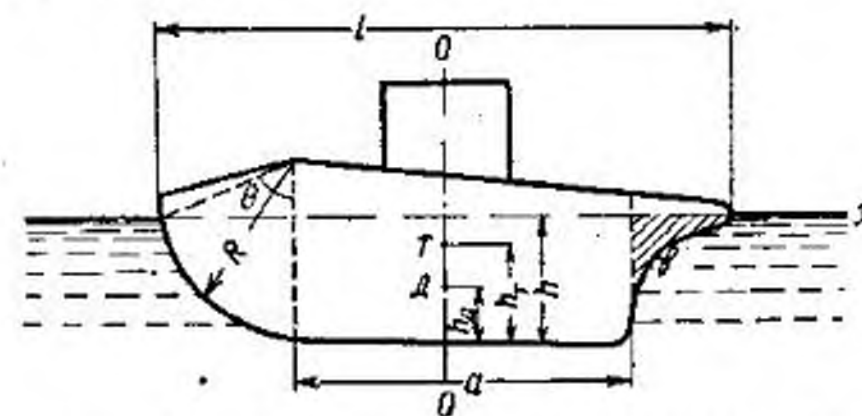
Заптрихованным на фиг. 6-14 объемом можно пренебречь.  
Из последнего уравнения методом подбора определим угол  $\theta$ :

$$\theta = 55^\circ.$$

Зная угол  $\theta$ , определим глубину погружения по формуле

$$h = R(1 - \cos \theta) = 1,25(1 - 0,574) = 0,533 \text{ м}.$$

**Задача 6-2.** Определить меньшую метацентрическую высоту  $H_m$  плава-  
ющего танка для условия предыдущей задачи, полагая  $l = 3 \text{ м}$ ;  $h_D = 0,3 \text{ м}$   
и  $h_T = 0,4 \text{ м}$  (фиг. 6-14).



Фиг. 6-14. Плавающая машина. К задаче 6-1.

**Решение.**  $H_m = \left( \frac{\gamma J}{G} - h \right)$ , где  $J$  — момент инерции площади ватерли-  
нии относительно оси  $xx$ , проходящей через центр тяжести площади ватер-  
линии:

$$J = \frac{lb^3}{12} = \frac{3 \cdot 8}{12} = 2 \text{ м}^4; h = h_T - h_D = 0,1 \text{ м}.$$

Подставляя вычисленные значения  $J$  и  $h$ , находим:

$$H_m = \left( \frac{2}{2,925} - 0,1 \right) = 0,584 \text{ м}.$$

Так как  $H_m > 0$ , танк обладает статической стойчивостью.

**Задача 6-3.** Определить начальный дифферент (начальный угол крена)  
плавающего танка согласно условию предыдущей задачи, полагая, что  
центр тяжести смещен вправо от оси  $00$  на расстояние  $r = 0,2 \text{ м}$  (фиг. 6-15).

**Решение.** В положении равновесия момент пары сил ( $P - G$ ) должен  
быть равен метацентрическому моменту:

$$M = P \left( \frac{\gamma J}{P} - h \right) \sin \theta = Gr \cos \theta,$$

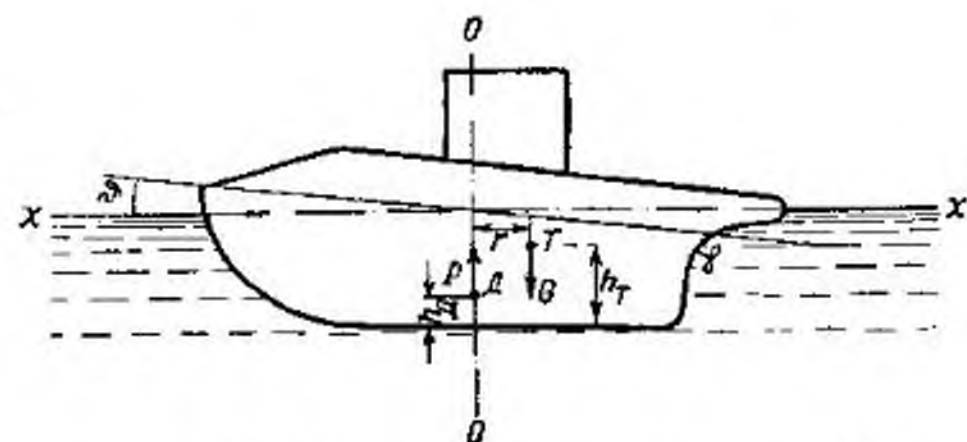
откуда

$$\text{tg } \theta = \frac{r}{\frac{\gamma J}{P} - h} = \frac{0,2}{1,44} = 0,139,$$

где  $J$  — момент инерции площади ватерлинии относительно ее поперечной  
оси, а

$$\theta = 7^\circ 55'.$$



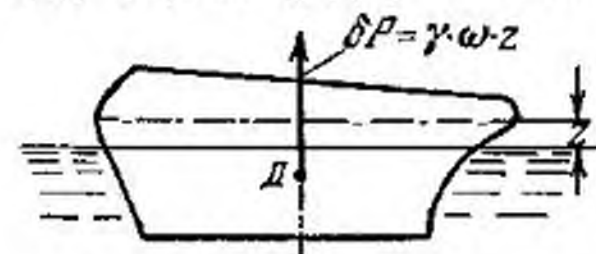


Фиг. 6-15. Плавающая машина. К задаче 6-2.

**Задача 6-4.** Требуется определить свободные колебания плавающего автомобиля, вес которого  $G = 12\,000$  кг, а площадь ватерлинии  $\omega = 18$  м<sup>2</sup>.

**Решение.** Для определения свободных колебаний плавающего автомобиля составим дифференциальные уравнения этих колебаний, пренебрегая сопротивлением жидкости.

При погружении плавающего тела на глубину  $z$ , большую той, которая соответствует равносному положению автомобиля на воде, появляется дополнительная подъемная сила (фиг. 6-16) (силы трения не учитываем)

Фиг. 6-16. Колебание тела вызвано дополнительным погружением на  $z$ . К задаче 6-4.

$$\delta P = -\gamma \omega z,$$

где  $z$  — дополнительное погружение;  
 $\gamma$  — объемный вес жидкости.

Знак „—“ показывает, что сила  $\delta P$  направлена в сторону, противоположную  $z$ .

Дифференциальное уравнение колебательного движения автомобиля может быть представлено в виде:

$$mz'' = -\gamma \omega z,$$

где  $z''$  — вторая производная по времени от  $z$ ;

$m = \frac{G}{g}$  — масса автомобиля.

Обозначим через

$$k^2 = \frac{\gamma \omega g}{G},$$

при этом будем иметь:

$$z'' = -k^2 z.$$

Полученное уравнение есть дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний, частота которых

$$k = \sqrt{\frac{\gamma \omega g}{G}}.$$

Интеграл этих уравнений

$$z = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt).$$

Постоянные интегрирования определяются по начальным данным.

Обозначая начальное дополнительное погружение через  $z_0$ , а начальную скорость колебания в этом положении  $v_{z_0} = 0$ , найдем, что

$$C_1 = z_0, \text{ а } C_2 = 0.$$

Таким образом, уравнение колебаний может быть представлено в виде:

$$z = z_0 \cos(kt).$$

Вычислим частоту свободных колебаний

$$k = \sqrt{\frac{\gamma \omega g}{G}} = \sqrt{\frac{1\,000 \cdot 18 \cdot 9,81}{12\,000}} = 3,836 \text{ 1/сек.}$$

Период свободных колебаний

$$T_{\text{своб}} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3,836} = 1,637 \text{ сек.}$$

**Задача 6-5.** Требуется определить амплитуду  $H$  вынужденных колебаний плавающего автомобиля, вес которого  $G = 12\,000$  кг, а площадь ватерлинии  $\omega = 18$  м<sup>2</sup>. Вынужденные колебания создаст волна, амплитуда которой (высота гребня)  $h = 2$  м. Частота волны, измеренная в данном водохранилище,

$$k_1 = 4,087 \text{ 1/сек.};$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = 1,537 \text{ сек.}$$

Такая волна создаст возмущающую силу, максимальное значение которой равно  $\delta P = \gamma \omega h$ .

Как известно из курса теоретической механики, амплитуда вынужденных колебаний вычисляется по формуле

$$H = \frac{\delta P}{mk^2 \left( \frac{k_1^2}{k^2} - 1 \right)},$$

где  $k$  — частота свободных колебаний, а  $m$  — масса. Подставляя значение  $k$  из предыдущей задачи, получим:

$$H = \frac{h}{\frac{k_1^2}{k^2} - 1} = \frac{h}{\frac{T_{\text{своб}}^2}{T_1^2} - 1}.$$

Значение частоты и периода свободных колебаний было найдено в предыдущей задаче

$$k = 3,836 \text{ 1/сек.};$$

$$T_{\text{своб}} = 1,637 \text{ сек.}$$

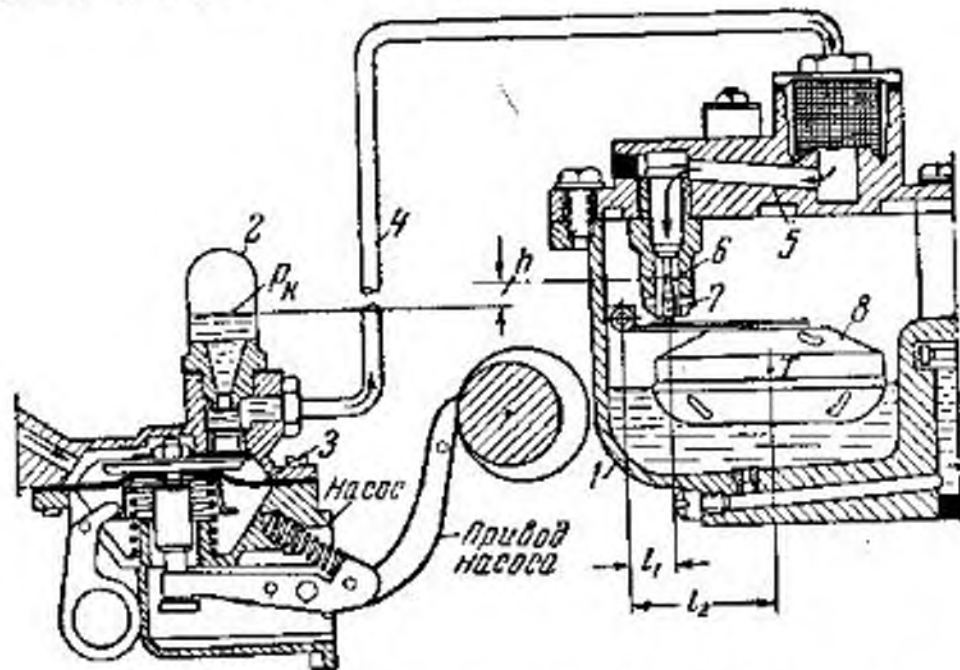
Подставляя найденные значения, получим:

$$H = \frac{2}{\left( \frac{1,637}{1,537} \right)^2 - 1} = \frac{2}{0,134} = 14,92 \text{ м.}$$

Колебания почти соответствуют резонансу и являются недопустимыми.



**Задача 6-6.** Горючее (бензин) поступает (фиг. 6-17) в поплавковую камеру 1 карбюратора из воздушного колпачка 2 диафрагменного насоса 3 по трубопроводу 4 через канал 5 и отверстие 6, запирающееся иглой 7 поплавка 8. Для того чтобы поплавковая камера не переполнялась, необходимо, чтобы давление  $p_k$ , создаваемое насосом, в колпачке и передающееся на иглу 7, не превосходило значений, при которых поплавок не сумеет прижать иглу с необходимым усилием. Максимальная сила, которую может развить поплавок, определяется степенью его затопления.



Фиг. 6-17. Поплавковое устройство. К задаче 6-6.

Требуется определить наибольшее допустимое давление в воздушном колпачке  $p_k$  согласно следующим данным: вес поплавка  $G_n = 15 \text{ Г}$ ; объем поплавка  $W = 35 \text{ см}^3$ ; степень затопления поплавка  $\eta = 75\%$  от его объема, вес иглы  $G_u = 0,85 \text{ Г}$ ; расстояние от уровня горючего в колпачке насоса до запорного отверстия  $h = 34,5 \text{ см}$ ; площадь запорного отверстия  $\omega = 2,54 \text{ мм}^2$ ; расстояние от оси вращения поплавка до оси иглы  $l_1 = 2,3 \text{ см}$ , до центра тяжести поплавка  $l_2 = 3,2 \text{ см}$ , до центра водоизмещения поплавка  $l_2 = 3,2 \text{ см}$ ; объемный вес бензина  $\gamma = 0,735 \text{ Г/см}^3$ .

$$\text{Ответ: } p_k = \frac{\gamma W \eta - G_n}{\omega} \cdot \frac{l_2}{l_1} + \gamma h - \frac{G_u}{\omega} = 0,235 \text{ кг/см}^2.$$

## ГИДРОДИНАМИКА

## Глава седьмая

## ВВЕДЕНИЕ В ГИДРОДИНАМИКУ

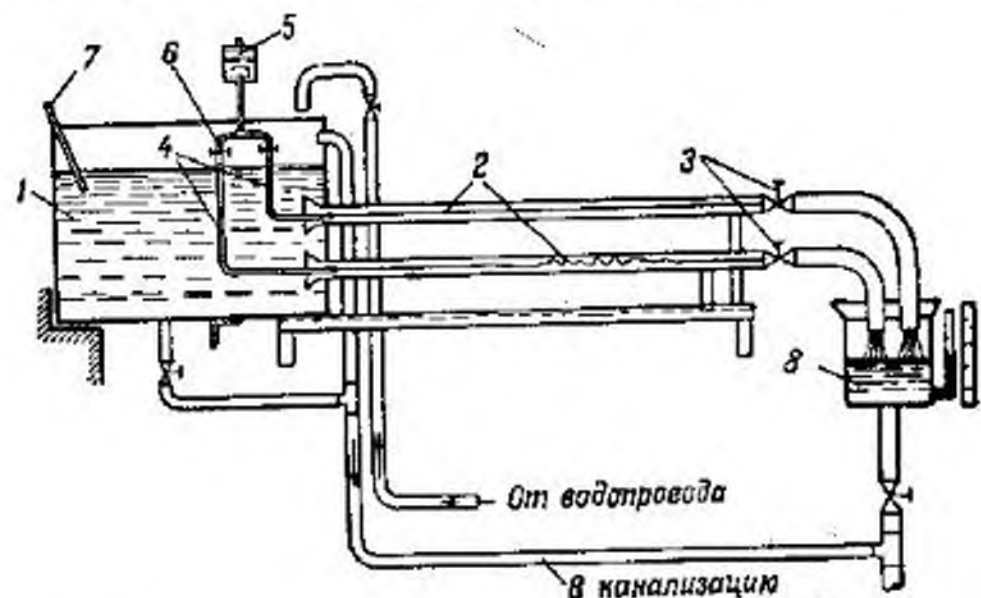
Основной задачей гидродинамики как части гидравлики является исследование закономерностей, характеризующих поток в целом. Однако выяснение различных факторов, влияющих на формирование потока, на диссипацию энергии в потоке и на связанную с ней проблему так называемых гидравлических сопротивлений и на многие другие явления, требует ясного представления о характере движения отдельных частиц.

## 7-1. Ламинарное и турбулентное движение

Некоторое общее представление о перемещении отдельных частиц дает наблюдение над потоком, в который вводятся или подкрашенная струйка жидкости, или специальные составы, образующие в жидкости пузырьки сферической формы (такие пузырьки, по плотности не отличающиеся от воды, образует смесь хлорбензола с вазелиновым маслом и цинковыми белилами). Движение отдельных частиц в общем виде можно представить, а при небольших скоростях и проследить на приборе, изображенном на фиг. 7-1. К резервуару 1, наполненному жидкостью, присоединяют одну или несколько стеклянных круглых трубок 2. Для уменьшения возмущений, создаваемых в жидкости при входе в трубку, ее входной конец снабжен соплом. Краном 3 можно регулировать количество протекающей в трубке 2 жидкости. Чтобы сделать движение жидкости видимым, в нее вводят по трубке 4 из резервуарчика 5 такую же, как и находящаяся в резервуаре, жидкость, но слегка подкрашенную. Краном 6 подкрашенную жидкость можно включить в общий поток жидкости, движущейся по трубке. Термометр 7 служит для определения температуры жидкости, а мерный бачок 8 со шкалой — для определения количества протекающей жидкости. Многочисленные опыты показали, что при определенных условиях подкрашенная струйка жидкости движется в трубке, не смешиваясь с основной массой жидкости (верхняя трубка фиг. 7-1); она вытягивается в тонкую



нить и производит впечатление натянутой струны. Аналогичная картина повторяется и в том случае, если в этот поток ввести несколько подкрашенных струек. Очевидно, это возможно лишь при условии, что вся масса жидкости устойчиво движется в трубе параллельными, несмещающимися струйками. Такое движение без перемешивания частиц называется ламинарным<sup>1</sup>. Струи жидкости, находящиеся на разном расстоянии от оси тру-



Фиг. 7-1. Установка для исследования режимов движения.

бы, движутся с различными скоростями, причем максимальную скорость имеет осевая струйка. При стенках скорость жидкости равна нулю. Постепенное увеличение скорости движения частиц (что осуществляется открыванием крана 3) или нагревание жидкости, ведущее к уменьшению вязкости, понижает устойчивость ламинарного движения и в конце концов разрушает его, — струйка разрывается.

На устойчивость ламинарного движения оказывает влияние вязкость жидкости, характеризующаяся коэффициентом  $\mu$  (а значит, и ее температура  $t$ ), ее плотность  $\rho$ , скорость движения частиц  $u$  или средняя скорость  $v$ , а также диаметр трубопровода  $d$ .

Нарушение ламинарного движения при прочих равных условиях (т. е. при равенстве  $\rho$  и  $\mu$ ) в трубах большего диаметра происходит при меньших скоростях. Разрыву струйки сначала предшествует образование волнообразных колебаний струйки.

<sup>1</sup> Ламинарный от латинского слова *laminis* — слоистый.

\* Средней скоростью  $v$  называется отношение количества жидкости, протекающей через рассматриваемое сечение трубопровода в единицу времени  $Q$ , к площади сечения потока  $\omega$ :

$$v = \frac{Q}{\omega}.$$

С усилением колебаний струйка разрывается и затем полностью перемешивается с остальной массой жидкости. Движение частиц производит впечатление беспорядочно перемещающихся вихрей. Этот вид движения называется турбулентным<sup>1</sup>.

Механизм турбулентного движения очень сложен. При турбулентном движении частицы жидкости, кроме главного движения вдоль трубопровода, имеют еще и поперечные перемещения, создающие перемешивание жидкости, что оказывает существенное влияние на деформацию объемов жидкости и вследствие этого на гидравлические сопротивления в потоке. Заметим, что все изложенное имеет место и в потоках, ограниченных ложем любой другой формы.

В турбулентном движении, как и в ламинарном, скорость у стенки принято считать равной нулю. По этому поводу Н. Е. Жуковский<sup>2</sup> писал: «Я предлагаю считать (это не очень точно подтверждено опытами, но все же довольно близко к действительности), что при стенках скорость жидкости равна нулю, но что затем она очень быстро возрастает».

Ближайший к стенке, весьма тонкий, слой жидкости движется почти ламинарно и называется пограничным ламинарным слоем.

По исследованиям Н. Е. Жуковского и А. И. Морошкина<sup>3</sup> этот пограничный слой является источником зарождения вихрей, которые, проникая в центральную область потока, разрушают устойчивость ламинарного потока. В иностранной литературе эти исследования называются «русскими опытами».

Из величин  $\rho$ ,  $\rho$ ,  $u$ ,  $d$ , влияющих на характер движения в круглой трубе, можно образовать лишь один безразмерный комплекс, играющий огромную роль в гидравлических исследованиях. Этому комплексу присвоено название числа Рейнольдса (сокращенно  $Re$ )

$$Re = \frac{ud\rho}{\mu}. \quad (7-1)$$

Весьма часто число  $Re$  выражают через среднюю скорость потока  $v$ . В потоках, ограниченных ложем не круглого сечения, вместо диаметра  $d$  вводится так называемый гидравлический радиус  $R$ , определяемый из зависимости

$$d = 4R. \quad (7-2)$$

При обтекании пластины вместо  $d$  вводится ее длина и т. п. Подробнее см. § 11-3.

<sup>1</sup> Турбулентный от латинского слова *turbulentus* — вихревой.

<sup>2</sup> Н. Е. Жуковский, Полное собрание сочинений, Теоретические основы воздухоплавания, ч. 1, стр. 351 — 352, ОНТИ НКВД СССР, 1938.

<sup>3</sup> Н. Е. Жуковский, *Versuche von Moroschkin*, Z. angew. Math. Mech., т. 8, стр. 143, 1928. См. также Математический сборник, т. XXXIII, 2, 1926.